# ARITHMETICÆ IN NVMERIS ET SPECIEBVS INSTITVTIO: QVÆ TVM LOGISTICÆ, TVM ANALYTICÆ, ATQVE ADEO TOTIVS MATHEMATICÆ, QVASI CLAVIS EST.

Oughtred

AD NOBILISSIMVM SPEctatissimumque iuvenem DN. GVILELMVM HOVVARD, Ordinis, qui dicitur, Balnei Equitem, honoratissimi DN. THOMÆ, Comitis ARVNDELIÆ & SVRRIÆ, Comitis MARESCHALLI ANGLIÆ, &c. filium.

[redacted] tenet

*LONDINI,*
Apud THOMAM HARPERVM.
M.DC.XXXI.

Constat 1 s.

J. C. H. Gebauer Dr.

## Nobilissime Heros,

CVm tibi, *illustrissimi tui patris jussu, in disciplinis Mathematicis exponendis deservierim, nihil magis in votis mihi fuit, quàm ut optima id fide, hoc est, via Analytica (quæ quidem doctrina est) præstarem. Atq; hanc ob causam, tum Euclidis demonstrationes, inter legendum, ad formam Analyticam revocavi, cujus in XIX. capite hujus tractatus nonnulla habentur exempla; tum regulas Analytices operationesq; admiscui, & quomodo per eas quæstiones expediendæ, & problemata solvenda essent, edocui. Tunc quidem pro re, & passim. Illas igitur regulas ab ipsis repetitas initijs, in unum quasi fasciculũ collectas, & ad problematum quàm plurimorum explicationem accommodatas, in hoc libello honori tuo offero, dico, addico. Quod sanè facio, non animo (ut multi) scripturiente, nec laudis aucupio, cum excusatione potius, nisi me officij mei ab illustrissimo patre tuo, teq; concrediti ratio moveret, indigere me judicarem: sed primò ut in promptu, & quasi ad manum, has traditiones Mathematicas*

*maticas haberes, ſi quando his tibi ſtudÿs vacare placuerit. Deinde ut in perpetuum honorem illuſtriſſimorum tuorum parentum, et tuum, palàm innoteſcat, quòd cùm plurima generoſi ſtemmatis pubes inaniter otiando, ne dicam turpiter bacchando, ætatis florem, remque diſperdant, tu bonis literis, philoſophia, matheſi, hiſtoria, incumbens, generis ſplendorem, per totum terrarum orbem celeberrimum, vera animi nobilitate, moribuſque ſuaviſſimis, ſatagis antecellere. Tertiò ut nobiliſſimo Dn.* Carolo Canditio *conſanguineo tuo,* φιλομαθεῖ τὲ καὶ πολυμαθεῖ, *cui me cognitum, meaque commendata, eſſe voluiſti, ſatisfacerem. Poſtremò ut matheſeos ſtudioſis quaſi Ariadnes filum porrigerem, quo ad intima harum Scientiarũ adyta deducantur, et ad optimos antiquiſſimosq́ authores, Euclidem, Archimedem, Apollonium Pergæum magnum illum Geometram, Ptolomæum, ac reliquos, faciliùs penitiùſque intelligendos, dirigantur: eorumque non propoſitiones modò addiſcant, quod pleriſque Mathematicis ſcientia quaſi culmen eſt et faſtigium, (mitto enim Mathematicaſtrorum vulgus, qui ſolummodò in praxi, quam vocant, revera præſtigÿs inſtrumentorum, quaſi in cortice, magna artis jactura, imo contemptu, detinentur) Sed etiam*

*percipiant*

percipiant qua solertia, quibus æquationum, interpretationum, comparationum, reductionum, conversionum, atque disquisitionum molíminibus prisci illi heroes scientiam hanc pulcherrimã ornaverint, auxerint, invenerint. Mihi quidem in illis legendis versanti, & demonstrationes ingeniosissimas ex incogitatis et inexpectatis, sed divino quodam artificio conquisitis, principijs adeò affabrè concinnatas animadvertenti, admirantiq; stupor incidit, unde tanta existeret imaginationis vis, quæ tam immensam consequentiarum molem sustinere posset, faceréq; ut tot res tam longè dissitæ animo simul obversentur, et quasi ultrò in argumenti unius structuram coeant atque considant. Quapropter ut ipsas res clariùs intuerer, propositiones et demonstrationes verborum integumentis exutas, brevibus tantum symbolis ac notis oculis etiam ipsis uno obtutu perspiciendas designavi: tum theorematum adfectiones varias, in æqualitate, proportione, adfinitate, atque dependentia, conferendo nova elicere tentavi. Denique quæstiones consimiles problematicè fingendo, easq; quasi jam confectas, via Analytica in sua principia resolvendo, rationes ac media, quibus construantur, investigavi. Hinc tandem (non nisi plurimorum annorum u-

su

*su atque experientia) præceptorum hæc qualiscunque seges emersit.*

*Succincta sane sunt hæc: non enim oscitantibus scripsi, sed verè matheseos candidatis: magis tamen pressa quàm brevia. Quæ vel tyronibus cognita esse debent, ea, quasi præteriens, digito tantum ostendi: in ijs, quæ difficultatis plus habere videbantur, profusius. Omnia quidem attento, operanti, constanterque per ipsa vestigia insequenti, satis dilucida erunt atque facilia. Cæterum me tibi, tuisque,* Δήλιον *habes* κολυμβητῆω: *cuivis etiam accedenti in tuam gratiam, et honorem, comem ac facilem futurum.*

*Item ne quid desideretur, logistica decimalis (quam præ sexagenaria illa Mathematices studiosis commendatam esse cupio) regulas breves interserui, easque ex Astronomia petitis exemplis illustravi.*

*Tu quidem spectatissime juvenis, ne tibi desis, satisq; tuis: sed macte virtute, rerumq; optimarum studio: ut inclytissimorum tuorum majorum,* Howardorum, Mowbraiorum, Warreniorum, Talbottorum, Fitz-Alanorum, D'Acræorum, *et reliquorum innumerorum procerum ac principum, luminarium ex hoc cælo nostro Britannico longè latéq; fulgentium, quorum ortus es sanguine,*

*sanguine, &, ut uno verbo omnia complectar, omnibus vera gloria virtutisq; insignijs ac muneribus cumulatissimi patris tui, dignam te sobolem præbeas. Quibus omnibus ut honore, & rerum pro patria, pro regibus, pro Deo immortali, fortissimè domi forisque gestarum magnitudine, par sis, ex animo precor, faxit Deus.*

*Ex ædibus illustrissimi patris tui Arundelianis ad ripam Thamesis. Ianuarij* 1. 1631.

Tibi, nobilissimæque

*Howardorum* fami-

liæ, addictissimus

*Guilelmus Oughtred.*

*Typographus in excusationem suam argumenti huius insoliti difficultatem causatur: rogatque lectorem benevolum, ut errata per totum hunc libellum commissa corrigere sic velit, ut sequitur.*

PAg. 3 *linea* 16, B-C *p* 4 *l* 11, -3 A *p* 8 *l* 3, 6 Aq *p* 12 *l* 23 & 24, $\begin{array}{r} 9 \\ \hline 7)252(36 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ \hline 5)96(19\frac{1}{5} \end{array}$ *p* 14 *l* 3, proportionales *p* 18 *l* 16, quibus demptis *p* 20 *l* 9, 4 ad 3: *p* 21 *l* 14, quadratorum summa Zq − 2ZE + 2Eq. *p* 22 *l* 17, $\frac{Pq - Eqq}{Eq}$. *p* 24 *l* 4, N|q|

*p* 27 *l* 4, inferioris. Numerus *p* 42 *l* 2, $\frac{Zq + X}{2Z}$ *p* 43 *l* 3, $\frac{RE + SE}{S} = Z$: *p* 44 *l* vlt. continuè *p* 46 *l* 14 & 15, X *l* 18, ZX = 2 X. *l* 19, ZX = 2XÆ. *p* 49 *l* 5, 6, 8, & 10, *per* 8 *c* 4. *p* 50 *l* 26, bisecanda: *p* 52 *l* 15, 1cc + 19c *l* vlt. coefficiens $\frac{ZS}{R}$ data est instar lineæ Z bisectæ; & absoluta $\frac{ZqS}{R}$: *p* 53 *l* 6, √q: $\frac{ZqSq}{4Rq} + \frac{ZqS}{R}$: − $\frac{ZS}{2R}$, *p* 53 *l* 9, In hac æquatione. *p* 53 *l* 22, restabit $\frac{289}{4}$, *p* 56 *l* 17, Nam AF × BF *p* 57 *in schemate priore* BKAD *p* 59 *l* 6, duplum esse. *p* 60 *l* 1, √q: $\frac{ZqSq}{4Rq}$ *l* 2, $\frac{ZS}{2R}$ *p* 60 *l* 10, duplicatam: *p* 64 *l* 14, Et bisecta BP in M, ducatur MF: *p* 65 *l* 17, √q: 2 BGq − BKq: *l* 28, BFq. BGq: *p* 66 *l* 10, √q: 2 BFq − BKq: *p* 70 *l* 10, BFq + √q: BFq *p* 72 *l* 8, Mq = 2 BC. *p* 73 *l* 8, tur, latus *p* 73 *in schemate infimo, pro* D *fiat* L *p* 74 *l* 4, R.S :: RE (FG). *p* 74 *l* 8, AB − A (BF). BL. *p* 75 *l* 11, punctum B statuatur *l* 12, BH: mensuretur etiam KA & KB = ½ AB. *p* 78 *l* 14, per 5 c 18, *p* 78 *l* 23, per 7 c 18, *p* 78 *l* 24, & per 7 *p* 79 *l* 24, :: Rq. Sq.

# ARITHMETICÆ IN NVMERIS ET SPECIEBVS INSTITVTIO.

## Cap. I.

1 NOtationis numerorum specimen, tum in integris, tum in partibus decimalibus.

| Integri | | | | | | | | | | vnit. | partes decimales | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| M | M | M | M | M | M | M | C | X | V | X | C | M | M | M | M | M | M | M |
| M | M | M | M | C | X | | | | | | | | X | C | M | M | M | M |
| M | C | X | | | | | | | | | | | | | | X | C | M |

2 Linea rectangularis post vnitatis locum dicitur separatrix: quia separat partes decimales ab integris.

3 Quemadmodum in integris, quilibet ab vnitatum loco gradus augetur versus sinistram decuplando: sic in partibus decimalibus, quilibet ab vnitatum loco gradus minuitur versus dexteram subdecuplando.

4 Vnitas autem, siue integrum, intelligitur semper diuidi in partes cognomines loco figuræ vltimæ, vt 0⌊1 est una decima pars: 0⌊12 sunt 12 centesimæ partes: 0⌊123 sunt 123 millesimæ partes: 0⌊1234 sunt 1234 deciesmillesimæ partes, & sic vlterius.

5 Circuli ante integros, vel post partes decimales

nihil valent, at verò post integros, & ante partes decimales (hoc est, vtrinq; lineæ separatrici proximi) vim suam retinent: nam gradus constituunt, quibus figurarum valores censentur, vt 00001 significat tantummodò vnum. & 0,1000 vnam decimam partem.

6 Quare in partibus decimalibus scribendis linea separatrix semper apponatur: & loci, siqui sunt, vacui circulis suppleantur: vt 0,00005 sunt quinque centies milesimæ partes.

Signum additionis, siue affirmationis, est + plus, vel pl. vt 34 vel + 34.

Signum subductionis, siue negationis est — minus vel m. vt — 34, negantur esse.

Pertinet autem signum ad magnitudinem sequentem cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non est præfixum signum negationis, intelligitur esse adfirmata, & habere signum +, licet non sit expressum.

## CAP. II.

## DE ADDITIONE.

1 NVmerus inuentus per Additionem dicitur summa, vel aggregatum.

2 Additio incipit ad dextram, & summas singulorum locorum particulares inuentas subscribit.

3 In Additione omnes numeri dati simul æquantur summæ.

Exempla

Exempla Additionis.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 79403 | 3794,236 | 17 l. | 13 s. | 4 d. |
| 8956 | 584,3 | 9. | 16. | 7. |
| 67293 | 947,08 | 238. | 09. | 6. |
| 5087 | 4720,7439 | 70. | 00. | 10. |
| 160739 | 48,5 | 48. | 10. | 3. |
| | 10094,8599 | 384. | 10. | 6. |

4 Additio ſpecioſa coniungit vtramque magnitudinem datam ſeruatis ſignis.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ad | 3A | A | 5A | 3A | A |
| adde | A | --A | --3A | --5A | E |
| Summa | 3A + A | A-A | 5A-3A | 3A-5A | A+E |
| hoc eſt | 4A | o | 2A | -2A | |

| | | |
|---|---|---|
| ad | A+B | A+B |
| adde | A-B | A --C |
| ſumma | 2 A | 2A+B-C |

## Cap. III.

## DE SVBDVCTIONE.

1 NVmerus inuentus per ſubductionem dicitur reliquus, vel differentia, vel exceſſus.

2 Subductio incipit ad dextram, & differentias ſingulorum locorum particulares inuentas ſubſcribit.

 3 In

3 In ſubductione numerus ſubducendus, vnâ cum differentia, æquatur numero ex quo.

Exempla ſubductionis.

| | | |
|---|---|---|
| 347206835 | 3794,236 | 17 l. 13 s. 4 d. |
| 6807592 | 947,08 | 9. 16. 7. |
| 340399243 | 2847,156 | 7. 16. 9. |

4 Subductio ſpecioſa coniungit vtramq; magnitudinem, mutatis omnibus ſignis magnitudinis ſubducendæ.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ex | 4A | 3A | 5A | A |
| tolle | A | 5A | -3A | E |
| reſtat | 4A-A | 3A -5A | 5A +3A | A-E |
| hoc eſt | 3A | --2A | 8A | |

| | | |
|---|---|---|
| ex | A | A |
| tolle | B+C | B-C |
| reſtat | A-B-C | A-B+C |

5 Notandum enim eſt, quod ſi in aliqua magnitudine ex multis ſpeciebus ſiue partibus connexa ſignis + vel--, ſint duæ ſpecies eadem nota inſignitæ; in vnam coaleſcent: præfixo ſcilicet ſummæ ipſarum communi ſigno, ſi ſigna vtriuſq; ſint ſimilia: vel præfixo differentiæ ipſarum ſigno eius, penes quam eſt exceſſus, ſi ſigna ſint diuerſa, vt A + B + A-B: hîc A + A coaleſcent in 2A: & B--B coaleſcent, ſiue potius euaneſcent in 0, ſeſe mutuò perimentes.

## CAP. IV.

## DE MVLTIPLICATIONE.

1 NVmerus inuentus per multiplicationem dicitur factus, vel productus, vel rectangulum, vel planum. Nam vnus è numeris propositis habetur pro longitudine; alter pro latitudine: & numeri propositi dicuntur factores, atq; latera.

2 Multiplicatio incipit ad dextram, & singulas figuras vnius numeri dati in singulas alterius figuras ducit: & factos demùm, habita locorum ratione, in vnam summam colligit. Et si partes decimales numeris propositis sint admixtæ, è toto facto tot locos linea separatrice abscindit, quot sunt loci partium in vtroq; factore.

3 Et si è numeris propositis vnus, vel vterq;, adiunctos habeat ad dextram circulos: omissis circulis, fiat ipsorum numerorum multiplicatio: & facto demùm tot insuper integrorum loci accenseantur, quot sunt circuli in vtroq; factore.

4 In Multiplicatione est, vt vnitas ad vnum è factoribus, sic alter è factoribus ad factum: vt si ducatur 4 in 6, fiet 24: est igitur 1. 4 :: 6. 24: vel 1. 6 :: 4. 24.

## Exempla Multiplicationis.

| | | |
|---|---|---|
| 4576 | 580\|34 | 358 |
| 892 | 47\|5 | 600 |
| 9152 | 290170 | 214800 |
| 41184 | 406238 | 7283\|54 |
| 36608 | 232136 | 6000 |
| 4081792 | 27566\|150 | 43701240\|00 |

5 Si duo numeri mixti dentur multiplicandi, velis autem factum prodire purum ſine partium mixtura (hoc eſt, ſi velis factum prodire multatum tot figuris, quot loci partium in vtroque ſunt multiplicando): ſtatues vnitatis locum minoris numeri dati ſub vnitatis loco maioris, & reliquas figuras minoris ſub numero maiore, ordine inde contrario: tum in multiplicatione incipies vbiq; ad illam figuram maioris numeri, quæ eſt ſupra eam figuram minoris, qua multiplicatur: habita tamen ratione incrementi quod è ſubſequentibus figuris maioris numeri ſuppeditatur, vt ſi multiplicandus ſit 246|914 per 35|27: purus factus erit 8708.

| |
|---|
| 246\|914 |
| 72\|53 |
| 17 |
| 49 |
| 1235 |
| 7407 |
| 8708 |

6 Quare

6 Quare si vnitatis locus minoris numeri demoueatur versus dextram ab vnitatis loco maioris vno gradu, aut pluribus, habebis itidem factum auctum, siue mixtum, totidem solummodo gradibus decimalibus.

```
    246|914
      72|53
   --------
     1729
     4938
   123457
   740742
   -------
   8708|66
```

7 Et contra, si vnitatis locus minoris numeri promoueatur versus sinistram ab vnitatis loco maioris: habere poteris, si opus sit, factum puro minorem, quot figuris visum erit. Vt 80902, qui sinus est graduum 54, multiplicandus sit in 39875, sinum maximæ declinationis grad. $23\frac{1}{2}$: factus multatus quinque posterioribus figuris erit 32260, qui sinus est declinationis solis in *Leo* 24.

```
    80902
    57893
   ------
        4
       57
      647
     7281
    24271
   ------
    32260
```

8 Multiplicatio speciosa connectit vtramque magnitudinem propositam cum nota in vel ×: vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur vnica litera. Et si vtriusque signa sint similia, producta magnitudo erit adfirmata: sin diuersa, negata. Effertur autem per in. Et nota quòd A in A, siue A × A, siue AA, est Aq. AAA, siue AqA, est Ac. AAAA, siue AqAq, siue AcA, est Aqq. AAAAA, siue AcAq, siue AqqA, est Aqc. AAAAAA, siue AcAc, siue AqqAq, siue AqcA, est Acc. &c.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| duc 3A | A | A-E | B+1 | A-E | AE |
| in 2A | E | B | A | B-C | A |
| fiet 6Aq | AE | BA-BE | BA+A | BA-BE-CA+CE | AqE |

| | | | |
|---|---|---|---|
| duc AE | A+E | A + E | √c 2Aq |
| in AE | A+E | A — E | √c 3Aq |
| fiet AqEq | Aq+AE | Aq+AE | √c 6Aqq |
| | +AE+Eq | —AE-Eq | |
| | Aq+2AE+Eq | Aq—Eq | |

## CAP. V.

## DE DIVISIONE.

1 NVmerus inuentus per Diuisionem dicitur quotus, vel etiam parabola: quia oritur ex adplicatione numeri plani ad longitudinem datam, vt inueniatur latitudo congrua. Et si numerus ad numerum adplicetur cum lineola interiecta, vt $\frac{24}{4}$ vel $\frac{1}{12}$, intelligitur numerum superiorem diuidendum esse per inferiorem, ad quem adplicatur.

2 Diuisio incipit ad sinistram, & postquam ex diuidendo sufficientem diuisori diuiduum distinxerit, & sub ipso diuisorem subscripserit, vel saltèm subscriptum cogitauerit; singulas figuras diuisoris ex singulis ipsius diuidui figuris supra stantibus æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: tum diuisore per quotum inuentum multiplicato; factoq; sublato ex diuiduo, diui-

diuiſorem in locum proximè ſequentem promouet, nouamq; vti priùs diuiſionem inſtituit: donec totum diuidendum percurrerit. Quilibet autem quotus particularis inuentus eiuſdem debet eſſe loci, ſiue gradus, cuius eſt figura diuidendi, quæ ſtat, vel cogitatur ſtare, ſupra vnitatis locum diuiſoris.

3 Et ſi diuiſor adiunctos ſibi habeat ad dextram circulos; omiſſis circulis, & abſciſſis totidem vltimis figuris diuidendi, in numeris reliquis fiat diuiſio: in fine autem diuiſionis reſtituendi ſunt tum omiſſi circuli, tum figuræ abſciſſæ.

4 In diuiſione eſt, vt diuiduus ad diuiſorem, ſic quotus ad vnitatem: vt diuiſo 24 per 6, quotus erit 4. Eſt igitur 24. 6 : : 4. 1.

5 Si magnitudo facta ſit ex duabus magnitudinibus, vna ex ijs ipſam per alteram metietur.

Exempla

Exempla Diuisionis.

```
297) 187135075 (630084 127/297      vel sic
     297
    1782                                 12
     893                              8921317
     297                     297) 187135075 (630084 127/297
     891                          178213768
      2507                         892118
      297
      2376                          2901
      1315                         435257
       297               58034) 275660,1500 (47,5
      1188                       23213680
       127                        406237
                                   2901
```

6|000) 4320|765 (720 $\frac{765}{6000}$

vel perge diuidere per 6: vt 6|000) 4320|765

720|1275

6 Aliquando numerus aliquis diuidi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum (siue integer sit, siue mixtus). Atque in hoc casu, sumptis quot opus est è primoribus figuris diuisoris pro primo diuisore, per ipsas diuides numerum propositum: deinde pro singulis subsequentibus particularibus diuisionibus diuisorem minues, amputando versus sinistram totidem singulas figuras, donec quotum

satis

ſatis amplum inueneris; vt diuidantur 467023 per numerum infinitum 357092642 5-

```
                       317
                      2803
                    109930
35709264+) 467023 (130785—
                    357093
                    107127
                      2500
                       286
```

7 Diuiſio ſpecioſa ſtatuit magnitudinem diuidentem ſub diuidua cum lineola interiecta. Diuiſio autem (ſicut & multiplicatio) in jiſdem ſignis dat +: in diuerſis dat —. effertur autem per ad

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| adplica | 6Aq | AE | BAc | BA-CA | BA+A |
| ad | 3A | A | Aq | B-C | A |
| oritur | 2A | E | BA | A | B+1 |

per regulam 5 diuiſionis.

8 In Multiplicatione atq; Diuiſione, vnitas nihil mutat.

---

## CAP. VI.

## *DE PROPORTIONE.*

1 SI è quatuor numeris datis, primus ita ſe habeat ad ſecundum, vt tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri eſſe proportionales. Numerorum

rorum autem ad ſe inuicem habitudo inuenitur diuidendo antecedentem per conſequentem, vt 31 ad 7 ratio eſt $4\frac{3}{7}$, hoc eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas. Sic etiam in partibus ratio $\frac{3}{2}$ ad $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{9}{4}$, vel 9 ad 4, dupla & ſeſqui quarta.

2 Quare ſi numerus duos numeros multiplicet; facti erunt multiplicatis proportionales. Et ſi numerus duos numeros diuidat; quoti erunt diuiſis proportionales.

$$4 \times \begin{cases} 7. & 28 \\ 9. & 36 \end{cases} \qquad A \times \begin{cases} B. & BA \\ C. & CA \end{cases}$$

3 Si quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis æquatur facto a mediis. vt in his

quia $7.\,9 :: 28.\,36$, erit $7 \times 36 = 9 \times 28$.
& quia $R.\,S :: Z.\,A$, erit $RA = ZS$.

4 Hinc ſequitur aurea (quæ dicitur) regula proportionis: Si tribus numeris datis, rectangulum ſub ſecundo & tertio adplicetur ad primum: hoc eſt, ſi ſecundus multiplicet tertium, & primus diuidat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. vt

$7.\,9 :: 28.\,36.$ $\qquad 5.\,12 :: 8 : 19\frac{1}{5}$

$7)\ \underline{9}(36$ $\qquad 5)\ \underline{2}(19\frac{1}{5}$

252 $\qquad$ 96

item $R.\,S :: Z.\,\frac{ZS}{R}$. Et quia modo poſitum fuit

$R.\,S :: Z.\,A$: erit $\frac{ZS}{R} = A$.

5 E tribus numeris datis ad quartum proportionalem inueniendum; terminus is, per quem fit quæſtio, in proportione directa eſt ſecundus, vel tertius: at

at in proportione reciproca ſemper eſt primus.

6 Directa quidem proportio eſt, quando terminus is, per quem fit quæſtio, quò maior eſt, eò quartum maiorem requirit: & quò minor, eò minorem.

7 Reciproca proportio eſt, quando terminus is per quem fit quæſtio, quò maior eſt eò quartum minorem requirit: & quò minor, eò maiorem.

8 Proportio continua $\div\!\!:$ eſt, quando termini omnes medij inter primum & vltimum, rationum ſunt tum conſequentes, cum antecedentes. vt 8. 12. 18. 27. Item

$\alpha.\ \beta.\ \frac{\beta q}{\alpha}.\ \frac{\beta c}{\alpha q}.\ \frac{\beta qq}{\alpha c}.\ \frac{\beta qc}{\alpha qq}$ &c.

9 Si quatuor numeri ſint proportionales A. $\alpha$ :: B. $\beta$: etiam alternè, & inuerſe, & compoſitè, & diuiſim & conuerſè proportionales erunt

| | | |
|---|---|---|
| ſim & conuerſè proportionales erunt | alternè, | A . B :: $\alpha$. $\beta$. |
| | inuerſè, | $\alpha$ . A :: $\beta$. B. |
| | compoſitè, | A + $\alpha$ . $\alpha$ :: B + $\beta$ . $\beta$. |
| | diuiſim, | A — $\alpha$ . $\alpha$ :: B − $\beta$ . $\beta$ : |
| | conuerſè, | A. A + $\alpha$ :: B. B + $\beta$. |

10 Si quodlibet numeri ſint proportionales: erit vt vnus antecedens ad ſuum conſequentem, ſic ſumma antecedentium, ad ſummam conſequentium. Eſto A. $\alpha$ :: B. $\beta$ :: C. $\gamma$: erit A. $\alpha$ :: A + B + C. $\alpha + \beta + \gamma$.

11 Si plurium proportionum antecedentes ſint æquales: erit vt vnus antecedens ad ſummam ſuorum conſequentium, ſic alter antecedens ad ſummam ſuorum. Eſto A. B :: $\alpha$. $\beta$ : & A. C :: $\alpha$. $\gamma$: Erit A. B + C :: $\alpha$. $\beta + \gamma$.

12 Si

12 Si quatuor numeri proportionales per alios quatuor numeros proportionales multiplicentur, vel diuidantur; etiã facti, vel quoti proportionalis erunt.

13 Exempla inuentionis quarti proportionalis in computationibus Astronomicis.

100000, 137638 :: 91706. 126223, tangens rectæ adscensionis solis in *Leo* 24

```
60719
    8
  964
 1376
123875
126223
```

100000. 0|0064 :: 42262. 0|0027

```
46000
    2
   25
0|0027
```

1. 0|0822 :: 1|75. 0|1438, prosthaphæresis orbis Lunæ pro Anomalia gra. 13|75, vel 146|25.

```
  57|1
    41
  576-
  822
0|1439
```

0|0822. 1 :: 0|1438000 : (1|75

```
0|0822
  6160
  5754
  4060
```

Cap.

## CAP. VII.

### DE MAXIMA COMMVNI MENSVRA: quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos eiusdem rationis.

1 MAxima duorum numerorum communis mensura inuenitur perpetua diuisione maioris per minorem, & diuisoris per reliquum. Nam diuisor ille qui primus diuiduum suum metitur, absq; vllo reliquo, maxima erit vtriusque numeri dati communis mensura. vt numerorum 899 & 744 maxima mensura inuenietur 31.

31 124 155
31)~~124~~)~~155~~)~~744~~)899(~~1414~~
~~124~~ ~~124~~ ~~620~~ ~~744~~

2 Numerorum reductio ad minimos terminos eiusdem rationis fit diuidendo vtrumq; per maximam ipsorum communem mensuram, vt 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi sunt termini in eadem ratione, diuiso vtroq; per 31 maximam vtriusque mensuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ diuidendo vtrumque terminum per 3A. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, diuidendo vtrumq; per B. Nam quod multiplicatio conficit, diuisio dissoluit.

3 Quare si maxima duorum numerorum communis mensura sit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter se. Suntque minimi in eadem ratione, vt 29 & 24.

4 Si numerus primus sit ad vtrumq;factorem, primus erit ad factum. Hinc proportionis operatio fieri sæpenumero potest facilior, vt in exemplo.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \cancel{3} & 2 & & 5 \\ \cancel{12}. & 8 :: & \cancel{15}. & 10. \end{array}$$

5 Memento autem diligenter, *Quotiescunq; fractio aliqua, siue ratio, proponitur, vt ipsam primò ad minimos terminos reducas*, vt $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

---

## Cap. VIII.

### *DE PARTIBVS: quæ etiam fractiones, siue numeri fracti, dicuntur.*

1 VNitas (siue integrum vnum quodque) concipi mente potest in quotcunque æquales partes diuisibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero suo, quem vnitas continet, sortiuntur: vt si vnitas intelligatur diuidi in binas æquales partes, dicuntur secundæ; si in tres, tertiæ: & sic de reliquis.

2 Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interiecta: quorum inferior denotat vnitatem diuisam in totidem æquales partes; & dicitur denominator. Superior verò ostendit quot ex partibus illis significantur; atque ideò dicitur numerator.

vt $\frac{4}{5}$ 4 numerator, 5 denominator } & significant quatuor quintas partes, siue quatuor partes vnius integri diuisi quinquifariam.

3 Quam

3 *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas significata ad vnitatem.* $4 . 5 :: \frac{4}{5} . 1.$ $R . S :: \frac{R}{S} . 1.$

4 Et quia ratio quæuis terminis innumeris similiter sese adinuicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: sequitur partes etiam easdem, non ijsdem solummodò numeris, sed alijs infinitis, posse designari. vt quincunem significant non modo $\frac{5}{12}$, qui minimi sunt termini in eadem ratione, sed etiam $\frac{10}{24}, \frac{20}{48}, \frac{25}{60}, \frac{45}{108}$: & quotcunque alij numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemuis numerum: per 2 cap. 6.

5 Quare æqualium partium, siue fractionem, termini sunt proportionales, & contra.

6 Item, si partium numerator minor sit denominatore, partes sunt vnitate minores: si æqualis, significant vnitatem. Et si maior, partes vnitatem excedunt, eâdem ratione, quâ denominator a numeratore superatur. Reducuntur autem ad vnitates diuidendo numeratorem per denominatorem: vt $\frac{31}{7}$ sunt $4\frac{3}{7}$. item $\frac{CR+SA}{R}$ est $C + \frac{SA}{R}$. Et contra integri, siue vnitates resoluuntur in partes cuiusque generis multiplicando vnitates per denominatorem earundem partium, vt 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{3}{3}$, &c; & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc est $\frac{31}{7}$. item $C + \frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$.

CAP.

## CAP. IX.

## DE ADDITIONE ET SUBDUCTIONE PARTIUM.

1 SI partes propositæ diuersarum sint specierum: Primò reducendæ sunt ad eandem denominationem, diuidendo denominatores per maximam ipsorum communem mensuram; & multiplicando terminos per alternos quotos. Deinde in numeratoribus partium inuentarum eiusdem denominationis additio vel subductio instituenda est. Et summæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator subscribendus.

2 Et si integri partibus sint immixti, seorsim tamen sunt numerandi. Exempli gratia: Ex $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ sunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque $2$ & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus e $6\frac{1}{18}$, restabunt $2\frac{95}{144}$ vt in exemplo

$$4)\ \frac{\overset{39}{13}}{16}\ \overset{67}{+}\ 2\frac{\overset{28}{7}}{12}\ \text{est}\ 3\frac{\overset{57}{19}}{48}\ \text{è}\ 6\frac{\overset{8}{1}}{18}$$

$$\underbrace{3\qquad 4}_{48}\qquad 6)\ \underbrace{3\qquad 8}_{144}$$

$$\begin{array}{r} 5\frac{152}{144} \\ 3\frac{57}{144} \\ \hline 2\frac{95}{144}\ \text{Rc} \end{array}$$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, summa $\frac{A+ZB}{B}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, restat $\frac{CA-BB}{BC}$

$$\frac{BE}{B} \pm \frac{DA}{D}$$

$$C)\ \underbrace{\frac{OA}{B}\qquad \frac{CB}{A}}_{CAB}$$

CAP.

## CAP. X.

## DE MULTIPLICATIONE ET DIVISIONE PARTIUM.

1 MUltiplicatio comparat heterologos terminos (hoc eſt reducit ad minimos), & multiplicat homologos.

2 Diuiſio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3 Et ſi integri partibus ſint immixti, reſoluendi ſunt integri in partes.

### Exempla Multiplicationis.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \text{ in } \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}} \text{ fit } \frac{5}{12} \;\Big|\; \frac{\overset{4}{8}}{9} \text{ in } \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} \text{ fit } \frac{20}{27} \;\Big|\; \frac{5}{1} \text{ in } 3\frac{1}{4} \text{ fit } \frac{\overset{13}{65}}{4} \;(\; 16\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{A}{B} \text{ in } B \text{ fit } A \;\Big|\; \frac{A}{B} \text{ in } Z \text{ fit } \frac{ZA}{B} \;\Big|\; \frac{A}{B} \text{ in } \frac{ZA}{G} \text{ fit } \frac{ZAq}{BG}$$

### Exempla Diuiſionis.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}\Big)\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{28}}}\Big(\frac{20}{21} \;\Big|\; \frac{\overset{1}{8}}{\underset{3}{\cancel{15}}}\Big)7\frac{\overset{37}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\Big(\frac{111}{8}\Big(13\frac{7}{8} \;\Big|\; \frac{\overset{1}{3}}{4}\Big)\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1}\Big(\frac{12}{1}$$

$$\frac{D}{1}\Big)\frac{Aq}{B}\Big(\frac{Aq}{DB} \;\Big|\; \frac{A}{D}\Big)\frac{BC}{1}\Big(\frac{BCD}{A} \;\Big|\; \frac{A}{B}\Big)\frac{BC}{1}\Big(\frac{BqG}{A}$$

$$\frac{B}{\underline{A}}\Big)\frac{BG}{\underline{1}}\Big(\frac{CA}{1} \;\Big|\; \frac{Ac}{\underline{C}}\Big)\frac{Bc}{D}\Big(\frac{BcC}{DAc}$$

4 Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? multiplica 21 per $\frac{2}{7}$: nam $1 . \frac{2}{7} :: 21 . 6$.

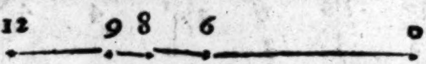
5 Cuius numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? diuide 6 per $\frac{2}{7}$. nam $\frac{2}{7} . 1 :: 6 . 21$.

6 Rationum continuatio fit multiplicatione ipsarum, ac si essent fractiones.


Continuentur rationes 3 ad 2, & 4 ad 6: fietq; ratio 12 ad 6, dupla. Est enim per schema, $\frac{3}{2} . \frac{4}{3} :: \frac{12}{8} . \frac{8}{6} :: 12 . 6 :: \frac{9}{6} . \frac{12}{9}$

12 . 8 . 6
12 . 9 . 6

Nam si in duabus rationibus, antecedens vnius æqualis sit consequenti alterius, sunt vt termini inæquales.




7 Rationum imminutio fit diuisione ipsarum, ac si essent fractiones.

Detrahatur ratio 4 ad 3 è ratione 3 ad 2: orieturq; ratio 9 ad 8, sesquioctaua. Est enim per schema præcedens $\frac{3}{2} , \frac{4}{3} :: \frac{12}{8} . \frac{12}{9} :: 9 . 8 :: \frac{9}{6} . \frac{8}{6}$.

12. 9. 8.
9. 8. 6.

Nam si duarum rationum consequentes sint æquales, sunt vt antecedentes: si verò antecedentes sint æquales, sunt reciprocè vt consequentes.

## CAP. XI.

*Exempla aliquot facillima, quibus, quæ hactenus tradita sunt familiaria redduntur: & via ad æquationem analyticam sternitur.*

1 SVnt duo numeri, quorum ſumma eſt Z: & maior ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt alter? quæ ipſorum differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? & differentia?
Minor erit Z--A. differentia 2A--Z. rectangulum ZA-Aq. quadratum maioris Aq. minoris Zq-2ZA+Aq. quadratorum ſumma Zq-2ZA+2Aq. differentia 2ZA-Zq.

Si verò minor ex ipſis ſit E: Maior erit Z-E. differentia Z--2E. rectangulum ZE-Eq. quadratum maioris Zq—ZE+2Eq. differentia Zq--2ZE.

2 Sunt duo numeri, quorum differentia eſt X: & maior ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt alter? quæ ipſorum ſumma? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? & differentia?
Minor erit A--X. ſumma 2A--X. rectangulum Aq—XA. quadratorum ſumma 2Aq—2XA+Xq. differentia 2XA—Xq.

Si verò minor ex ipſis ſit E: Maior erit E+X. ſumma 2E+X. rectangulum Eq+XE. quadratorum ſumma 2Eq+2XE+Xq. differentia 2XE+Xq.

3 Sunt duo numeri quorum maior ad minorem eſt in ratione R ad S: & maior ex ipſis ponitur A:

quisnam erit alter? quæ ipsorũ summa? quod sub ipsis rectangulũ? quæ quadratorum summa? & differentia? Minor erit $\frac{SA}{R}$. summa $\frac{RA+SA}{R}$. differentia $\frac{RA-SA}{R}$. rectang: $\frac{SAq}{R}$. quadratorum summa $\frac{RqAq+SqAq}{Rq}$. differentia $\frac{RqAq--SqAq}{Rq}$.

Si verò minor ex ipsis sit E: Maior erit $\frac{RE}{S}$. summa $\frac{RE+SE}{S}$. differentia $\frac{RE-SE}{S}$ rectangulum $\frac{REq}{S}$. quadratorum summa $\frac{RqEq+SqEq}{Sq}$. differentia $\frac{RqEq-SqEq}{Sq}$.

4 Sunt duo numeri, quorum rectangulum est P: & maior ex ipsis ponitur A: quisnam est alter? quæ summa? quæ differentia? quæ quadratorum summa? & differentia?
Minor erit $\frac{P}{A}$. summa $\frac{Aq+P}{A}$. differentia $\frac{Aq--P}{A}$. quadratorum summa $\frac{Aqq+Pq}{Aq}$ differentia $\frac{Aqq--Pq}{Aq}$.

Si verò minor ex ipsis sit E: Maior erit $\frac{P}{E}$. summa $\frac{P+Eq}{E}$. differentia $\frac{P--Eq}{E}$. quadratorum summa $\frac{Pq+Eqq}{Eq}$ differentia $\frac{Pq--Eqq}{Eq}$.

## CAP. XII.

## DE GENESI, ET ANALYSI POTESTATVM.

1 QVia omnia resoluuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur: primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt a radice aliquoties in se multiplicata. Nam latus in se ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum. Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana $\boxed{4}$: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam $\boxed{5}$: Et sic vlteriùs progrediendo fiunt potestates sextana $\boxed{6}$, septimana $\boxed{7}$, octauana $\boxed{8}$, nonana $\boxed{9}$, decumana $\boxed{10}$, & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

Quare potestatum a radice singulari, quæ vnica figura, siue nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

## 2 TABELLA PRIOR POTESTATUM A RADICE SINGULARI.

| L N | 2 q | 3 c | 4 qq | 5 qc | 6 cc | 7 qqc | 8 qcc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 | 823543 | 5764801 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 |

3 Quæ

3 Quæ verò a radice binarum notarum exurgunt, hunc habent ortus sui modum.

Genesis poteſtatum a radice binomia.

$$
\begin{array}{l}
\quad A + E \\
\quad A + E \\
\hline
Aq + AE \\
\qquad + AE + Eq \\
\hline
Aq + 2AE + Eq. \text{ Quadratum} \\
\quad A + E \\
\hline
Ac + 2AqE + AEq \\
\quad + AqE + 2AEq + Ec \\
\hline
Ac + 3AqE + 3AEq + Ec. \text{ Cubus} \\
\quad A + E \\
\hline
Aqq + 3AcE + 3AqEq + AEc \\
\quad + AcE + 3AqEq + 3AEc + Eqq \\
\hline
Aqq + 4AcE + 6AqEq + 4AEc + Eqq. \text{ Quadrato-quad.} \\
\quad A + E \quad \&c.
\end{array}
$$

4 Atque hoc artificio conficietur tabula poteſtatum adſcendentium in ſcala a radice binomia; quæ *POSTERIOR* vocetur.

AE

| Latus siue numerus. | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | Aq | Ac | Aqq | Aqc | Acc | Aqqc | Aqcc | Accc | Aqqcc |
| E | 2AE | 3AqE | 4AcE | 5AqqE | 6AqcE | 7AccE | 8AqqcE | 9AqccE | 10AcccE |
| | Eq | 3AEq | 6AqEq | 10AcEq | 15AqqEq | 21AqcEq | 28AccEq | 36AqqcEq | 45AqccEq |
| | | Ec | 4AEc | 10AqEc | 20AcEc | 35AqqEc | 56AqcEc | 84AccEc | 120AqqcEc |
| | | | Eqq | 5AEqq | 15AqEqq | 35AcEqq | 70AqqEqq | 126AqcEqq | 210AccEqq |
| | | | | Eqc | 6AEqc | 21AqEqc | 56AcEqc | 126AqqEqc | 252AqcEqc |
| | | | | | Ecc | 7AEcc | 28AqEcc | 84AcEcc | 210AqqEcc |
| | | | | | | Eqqc | 8AEqqc | 36AqEqqc | 120AcEqqc |
| | | | | | | | Eqcc | 9AEqcc | 45AqEqcc |
| | | | | | | | | Eccc | 10AEccc |
| | | | | | | | | | Eqqcc |

5 Quælibet species intermedia cuiusque ordinis cōponitur ex duabus speciebus ordinis præcedentis vtrinque proximis: nempe A potestate superioris speciei, & E potestate inferioris; numerus etiam adfigendus ex vtroque numero ijsdem adfixo aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula vlterius pro libitu.

6 In hac tabula duæ extremæ potestates singulorum generum sunt diagonales: & species intermediæ sunt complementa: quibus adfixæ sunt vnicæ, ostendentes numerū complementorū in constitutione cuiusq; potestatis sumendorū. Complementa autem omnia, cum E potestate, Gnomō non ineptè dici poterit.

7 Ex hac tabula etiam liquet, quòd quadratum a radice binarum notarum constat ex diagonalibus quadratis vtriusque notæ, & duplice rectangulo sub ipsis notis. Cubus autem constat ex cubis diagonalibus, & triplice solido sub quadrato maioris notæ & nota minore, & triplice item solido sub majore nota & quadrato minoris: Quod similiter de reliquis quoque potestatibus est efferendum.

8 Ostendit insuper plena hæc mysterijs pulcherrimis tabella, in numerosa potestate, sedes tum potestatum singularium siue diagonalium, tum cuiusque speciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata vnica est species, quadratorum sedes vnicum interponent pro complementis locum: Et cùm inter binos cubos duæ sunt complementorum species, cuborum sedes binos interponent locos complementis suis ordine distribuendos.

## CAP. XIII.

*His itaque præmissis ad GENESIN potestatum accedamus.*

1 PRoponatur Genesis quadrati a latere 57. maior igitur nota A est 5, minor E est 7. Scribantur 5 & 7 intermisso vnius gradus spacio: & linea sub ipsis ducatur. Sub 5 statuatur quadratum suum 25: & sub 7 suum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendum loco intermedio. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæsito.

| | | |
|---|---|---|
| 5 7 | | |
| 25 | Aq | |
| 70 | 2AE | gnomon |
| 49 | Eq | gnomon |
| 3249 | | |

2 Proponatur iterum Genesis cubi a latere 57. scribantur 5 & 7 intermisso duorum graduum spacio: & linea sub ipsis ducatur. sub 5 statuatur cubus suus 125: & sub 7 suus 343. tum quadratum a 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum solidum maius 525, ponendum loco priore intermedio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum a 7, fietque triplum solidum minus 735, ponendum

| | | |
|---|---|---|
| 5 7 | | |
| 125 | Ac | |
| 525 | 3AqE | gnomon. |
| 735 | 3AEq | gnomon. |
| 343 | Ec | gnomon. |
| 185193 | | |

ponendum loco intermedio secundo: addantur omnia suis quæque locis: summa erit 185193 pro cubo lateris 57 quæsito.

3 Si latus propositum constet pluribus figuris, vt 57209: Primò potestas duarum primarum figurarum 57 quærenda est. Deinde sumptis 57 pro A, & figura 2 sequente pro E: quæratur potestas ipsius eodem, qui ante ostensus est, tabellæ ordine: Quod etiam in reliquis figuris singulatim est faciendum.

| | | |
|---|---|---|
| 5 7 2 0 9 | | Radix |
| 25 | Aq | |
| 70 | 2AE | gnomon. |
| 49 | Eq | |
| 3249 | Aq | |
| 228 | 2AE | gnomon. |
| 4 | Eq | |
| 32718400 | Aq | |
| 102960 | 2AE | gnomon. |
| 81 | Eq | |
| 3272869681 | | Quadratum. |

| | | |
|---|---|---|
| 5 7 2 0 9 | Radix | |
| 125 | Ac | |
| 525 | 3AqE | gnomon |
| 735 | 3AEq | |
| 343 | Ec | |
| 185193 | Ac | |
| 19494 | 3AqE | gnomon |
| 684 | 3AEq | |
| 8 | Ec | |
| 187149248000 | Ac | |
| 883396800 | 3AqE | gnomon |
| 1308960 | 3AEq | |
| 729 | Ec | |
| 187237600770329 | Cubus. | |

4 Ex his, quæ iam declarata sunt, non difficile erit reliquas etiam omnes superiorum generum potestates progignere: modò in ipsarum genitura inferiorum omnium ad ipsas adscendentium potestatum genesis instituatur: sicut in cubi genesi iam factum vides.

## Cap. XIIII.

*Sequitur ANALYSIS: quæ est eductio radicis ex numerosa potestate data.*

1 Analysis, postquam sedes potestatum, pro suo quasque iuxta tabulam genere, punctis, posito primo puncto sub loco vnitatum, distinxerit: primò ex figuris primi a sinistra puncti potestatem diagonalem comprehensam tollit: latusque ipsius, quod A vocetur in margine scribit. tum numero reliquo, ad proximum vsque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per diuisorem ex latere A inuento legitimè conflatum, diuiso, secundum latus E quærit, & in margine scribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo subtrahit. Et sic integra duorum primorum singularium laterum, in duobus primis punctis contenta, potestate dempta, restabit ad tertium vsque punctum gnomon pro tertio latere similiter eruendo.

Analysis

Analysis quadrati.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 72 | 02 | | |
| 3272 | 8696 | 81 | (57209 punctatio |
| 25 | Aq | | |
| 10 | 2A | divisor | |
| 70 | 2AE } | | |
| 49 | Eq } | | |
| 749 | | gnomon | |
| 11 | 4 2A | divisor | |
| 22 | 8 | 2AE } | |
| | 4 | Eq } | |
| 22 | 4 | gnomon | |
| 1 | 144 | 2A divisor | |
| | 1144 | 0 2A divisor | |
| 1 | 0236 | 0 2AE } | |
| | | 81 Eq } | |
| 1 | 0296 | 81 gnomon. | |

Analysis

Analysis Cubi.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 88 | | | | | | | |
| 62 | 0443 | 5 | 2 | | | | | |
| 187 | 2376 | 0 | 0 | 770 | 329 | (57209 | | |
| 125 | | Ac | | | | | | |
| 7 | 5 | 3Aq | | | | | | |
| | 15 | 3A | | | | | | |
| 7 | 65 | diuisor | | | | | | |
| 52 | 5 | 3AqE | | | | | | |
| 7 | 35 | 3AEq | | | | | | |
| | 343 | Ec | | | | | | |
| 60 | 193 | gno- | mon | | | | | |
| | 9747 | | 3Aq | | | | | |
| | 171 | | 3A | | | | | |
| | 97641 | | diui- | ſor | | | | |
| 1 | 94 | 94 | 3AqE | | | | | |
| | 6 | 84 | 3AEq | | | | | |
| | | 8 | Ec | | | | | |
| 1 | 856 | 2 4 8 | gno- | mon | | | | |
| | 98 | 1 5 5 | 2 | 3Aq | | | | |
| | | 1 7 | 1 6 | 3A | | | | |
| | 98 | 1 7 2 | 3 6 | diuiſor | | | | |
| | 9 | 8 1 5 | 5 2 0 | 0 | 3Aq | | | |
| | | | 1 7 1 | 60 | 3A | | | |
| | 9 | 8 1 5 | 6 9 1 | 60 | diuiſor | | | |
| | 88 | 3 3 9 | 6 8 0 | 0 | 3AqE | | | |
| | | 1 3 | 0 8 9 | 60 | 3AEq | | | |
| | | | | 729 | Ec | | | |
| | 88 | 3 5 2 | 770 | 329 | gnomon. | | | |

5 7 2 0
25
70
49
3249
228
4
32718400

2 Si numerus propoſitus non ſit verus ſui generis figuratus, ſed peracta Analyſi aliquid reſtet: punctationes circulorum pro ſuo genere, quot opus erit ſtatuendæ ſunt: & continuanda Analyſis poſt lineam ſeparatricem.

3 Ex his etiam quæ declarata ſunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex ſuperioribus poteſtatibus omnibus educere.

## CAP. XV.

## DE LATERIBVS SVRDIS.

1 NVmeri plani, vel ſolidi, ſimiles ſunt, quorum latera homologa ſunt proportionalia.

2 Numeri plani ſimiles ſunt in duplicata ratione (hoc eſt, vt quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani ſimiles, vt quadratus numerus ad quadratum numerum.

3 Numeri ſolidi ſimiles ſunt in triplicata ratione (hoc eſt vt cubi) homologorum laterum. Sunt igitur numeri ſolidi ſimiles, vt numerus cubicus ad numerum cubicum.

4 Et generaliter omnes figurati plurium dimenſionum ſunt in ratione homologorum laterum æquimultiplicata numero dimenſionum ſuarum, ex quibus componuntur.

5 Si numerus non ſit verus ſui generis figuratus,

latus

latus eius dicitur ſurdum: & ſic notatur, $\surd q6$, $\surd c4$, $\surd qq20$, $\surd qc13$: hoc eſt latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6 Latera ſurda commenſurabilia ſunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti fiunt veri ſui generis figurati: ſuntque idcirco vt numerus ad numerum. vt $\surd q12$ & $\surd q147$ reducta ad minimos terminos per $\surd q3$ maximam vtriuſque communem menſuram, fiunt $\surd q4$ & $\surd q49$, hoc eſt 2 & 7: quare cum $\surd q12$ & $\surd q147$ ſint vt 2 ad 7, erunt commenſurabilia. Sic $\surd c40$ & $\surd c1715$ ſunt vt 2 ad 7, quoniam diuiſa per maximam ſuam communem menſuram $\surd c5$, fiunt $\surd c8$ & $\surd c343$ ideoque commenſurabilia. Sic etiam ratio $\surd q\frac{4}{3}$ ad $\surd q\frac{3}{4}$ eſt $\surd q\frac{16}{9}$, hoc eſt $\frac{4}{3}$. nam $\surd q\frac{3}{4}$) $\surd q\frac{4}{3}$ ($\surd q\frac{16}{9}$.

7 Adduntur autem, atque ſubtrahuntur, latera ſurda commenſurabilia, ſi ſummæ, vel differentiæ, numerorum ipſis ſimilium inuentorum homogenea poteſtas ducatur in communem ipſorum menſuram. Vt $\surd q147 + \surd q12$ eſt $\surd q243$; hoc eſt latus quadrati a $7+2$ (nempe 81) ductum in $\surd q3$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd q147 - \surd q12$ eſt $\surd q75$; hoc eſt latus quadrati a $7-2$ (nempe 25) ductum etiam in $\surd q3$.

Item $\surd c1715 + \surd c40$ eſt $\surd c3645$, hoc eſt latus cubi a $7+2$ (nempe 729) ductum in $\surd c5$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd c1715 - \surd c40$ eſt $\surd c625$; hoc eſt latus cubi a $7-2$ ductum etiam in $\surd c5$.

Additionis & subductionis operatio talis est.

$$\sqrt{q}3)\ \begin{array}{l} \sqrt{q}147\ (\sqrt{q}49 \cdot 7 \\ \sqrt{q}\ 12\ (\sqrt{q}\ 4 \cdot 2 \end{array} \qquad \sqrt{c}5)\ \begin{array}{l} \sqrt{c}1715 (\sqrt{c}343 \cdot 7 \\ \sqrt{c}\ 40\ (\sqrt{c}\ 8 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sqrt{q}243 & \sqrt{q}\ 81 . 9 & \text{sũma} & \sqrt{c}3645 \quad \sqrt{c}729 . 9 \\ \sqrt{q}\ 75 & \sqrt{q}\ 25 . 5 & \text{diffr.} & \sqrt{c}\ 625 \quad \sqrt{c}125 . 5 \end{array}$$

Quod quidem hac probatur analogia.

$$2 \cdot 7 + 2 :: \begin{cases} \sqrt{q}12 \ . \ \sqrt{q}243 \\ \sqrt{c}40 \ : \ \sqrt{c}\,3645 \end{cases}$$

$$2 . 7 - 2 :: \begin{cases} \sqrt{q}12 \ . \ \sqrt{q}75 \\ \sqrt{c}40 \ . \ \sqrt{c}625 \end{cases}$$

$$7 \cdot 7 + 2 :: \begin{cases} \sqrt{q}147 \cdot \sqrt{q}243 \\ \sqrt{c}1715 \cdot \sqrt{c}3645 \end{cases}$$

$$7 \cdot 7 - 2 :: \begin{cases} \sqrt{q}147 \cdot \sqrt{q}\ 75 \\ \sqrt{c}171 \ . \ \sqrt{c}625 \end{cases}$$

8 Latera verò surda incommensurabilia, atque heterogenea, adduntur, vel subtrahuntur, signis + vel —. vt $\sqrt{q}7 + \sqrt{q}4$. & $\sqrt{c}10 - \sqrt{c}5$.

9 Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit numerus eiusdem generis figuratus, cuius latus æquale est facto a lateribus numerorum multiplicatorum. Et si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum diuidatur, quotus erit numerus eiusdem generis figuratus, cuius latus æquale est quoto lateris maioris diuisi per latus minoris. vt factus a numeris cubicis 343 & 27 est 9261, numerus etiam cubicus, cuius latus est $7 \times 3$. Item $\sqrt{q}\frac{AqEq}{Bq}$ est $\frac{AE}{B}$.

10 Quare laterum surdorum homogenorum multiplicatio, & diuisio, procreat latus etiam surdum homo-

homogeneum: vt $\surd q7$ in $\surd q3$ est $\surd q21$. Et $\surd q7$) $\surd q21$ ($\surd q3$: vel $\surd q\frac{21}{7}$ est $\surd q3$. Item $\surd qA$ in $\surd qE$ est $\surd qAE$: Et $\surd qA$) $\surd qAE$ ($\surd qE$: vel $\surd q\frac{AE}{A}$ est $\surd qE$.

11 Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel diuiduntur, nisi prius ad idem genus reducuntur. quod fit diuidendo indices vtriusque potestatis prepositæ per maximam ipsorum communem mensuram: et multiplando ipsas potestates in species alternis quotis cognomines. vt si ad multiplicandum, vel diuidendum, proponantur $\surd qq10$ & $\surd cc7$: Primò reducuntur ad $\surd cccc1000$, & $\surd cccc49$, cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel diuisio. Sic etiam $\surd qqA$, & $\surd ccBq$ reducuntur ad $\surd ccccAc$, & $\surd ccccBqq$: vti planius adparebit per praxim, que hic adponitur.

$$\surd\,\boxed{12}\,1000 \qquad \surd\,\boxed{12}\,49 \qquad \surd\,\boxed{12}\,Ac \qquad \surd\,\boxed{12}\,Bqq$$
$$\boxed{2})\,\surd\,\boxed{4}\,10 \qquad \surd\,\boxed{6}\,7 \qquad \boxed{2})\,\surd\,\boxed{4}\,A \qquad \surd\,\boxed{6}\,Bq$$
$$\boxed{3} \qquad\qquad \boxed{2} \qquad\qquad \boxed{3} \qquad\qquad \boxed{2}$$

Rursùs si $\surd c32$ duplicandum sit, vel multiplicandum per 2: pro 2 sumatur $\surd c8$: & per ipsum multiplicetur $\surd c32$; fietque $\surd c256$, æquiualens bis $\surd c32$.

Item si dimidiandum sit $\surd c32$, vel diuidendum per 2: pro 2 sumatur $\surd c8$; & per ipsum diuidatur $\surd c32$; orieturque $\surd c\frac{32}{8}$; hoc est $\surd c4$, æquiualens $\frac{1}{2}\surd c32$:

Sic etiam $\frac{22}{7}\surd qAq$, fiet $\surd q\frac{484}{49}Aq$, hoc est $\frac{22}{7}A$.

12 Si latus potestatis multiplicandum sit secundùm exigentiam suæ speciei: deleatur nota speciei lateralis. vt Q: √q64, vel C: √c64, est 64.

Et si latus potestatis, cuius index est numerus compositus, multiplicandum sit secundùm exigentiam alterutrius speciei componentis: latus alterius speciei numero speciali solùm præfigatur: vt Q: √cc64 est √c64: & C. √cc64 est √q64.

## Cap. XVI.

### DE ÆQVATIONE, & De quæstionibus per Æquationem soluendis.

1 QVotiescunque problema aliquod, siue quæstio, proponitur: Puta præstitum esse quod postulatur: aptáque adhibita ratiocinatione, pro quæsita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis consonantes: quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoscantur.

2 Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæsitæ, secundum cōditionem quæstioni conuenientem, efformentur atque comparentur, addendo, subtrahendo, multiplicando, & diuidendo: donec tandem aliquid inueniatur magnitudini, de qua quæritur, vel suæ, ad quam adscendet, potestati æquale. Æqualitatis autem nota sit =.

3 Et

3 Et quia in omni ferè æquatione, vbi primò ex inuolucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipsius ita sunt ordinandi, vt quæ in data habentur mensura, faciant vnam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. quod quo artificio fiat, regulæ quinque sequentes commonstrabunt.

4 Primò, si magnitudo quæsita, vel aliquis eius gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad vnam denominationem reductio: vt emisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. vt $A - C = \frac{A+B}{D} + B + C$ erit $\frac{DA - DC}{D} = \frac{A+B+DB+DC}{D}$ vel $DA - DC = A + B + DB + DC$.

5 Secundò, si, quæ in data habentur mensura, immisceantur cum quæsitis: *fiat transpositio magnitudinum ex vna parte in aliam sub contrario signo.* vt $DA - DC = A + B + DB + DC$, facta magnitudinum A & DC transpositione, erit $DA - A = 2DC + DB + B$. Quæ etiam regula in omni transpositione seruanda est.

6 Tertiò, si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam: fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis adplicatio. vt $DA - A = 2DC + DB + B$ erit $A = \frac{2DC + DB + B}{D - 1}$. Item $BAq + BqA = Z$ erit $Aq + BA = \frac{Z}{B}$.

7 Quartò, si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ: fiat omnium, per adplicationem ad minimam speciem, secundum ordinem tabellæ communis depressio. vt $Aqq + BAc = ZAq$, erit $Aq + BA = Z$, expuncto

in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet proposita poterit deprimi, siue reduci ad minores species; Si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis adplicatio. vt $Ac + XAq = Nc$, diuisa per A, fiet $Aq + XA = \frac{Nc}{A}$: at diuisa per Aq, fiet $A + X = \frac{Nc}{Aq}$. Quæ quidem operatio in numerosa adfectarum æquationum resolutione vsus erit non contemnendi: quia latus quæsitum faciliùs æstimatur in minoribus potestatibus, quam in maioribus.

8 Quintò, si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est instituenda. vt $\sqrt{q}BA + B = CA$, vel per transpositionem $\sqrt{q}BA = CA - B$: quia quadratum ex $\sqrt{q}BA$ est BA: & quadratum ex $CA - B$ est $CqAq - 2BCA + Bq$: erit $BA = CqAq - 2BCA + Bq$: vel per reg. secund. $2BCA + BA - CqAq = Bq$: & per reg. tertiam, $\frac{2BCA + BA}{Cq} - Aq = \frac{Bq}{Cq}$. vel etiam $\frac{2BC + B}{Cq} A - Aq = \frac{Bq}{Cq}$. Item $\sqrt{q}$ vniuers: $BA + CA$: $- D = BC$: vel per transpositionem $\sqrt{q}$: $BA + CA = BC + D$: quia quadratum ex $\sqrt{q}$: $BA + CA$: est $BA + CA$: & Q: $BC + D$ est $BqCq + 2BCD + Dq$: Erit $BA + CA = BqCq + 2BCD + Dq$: & per reg. ter. $A = \frac{BqCq + 2BCD + Dq}{B + C}$.

Cap.

## CAP. XVII.

*Exempla pro cognitione vsuq; Æquationis Analyticæ, ex quæstionibus c. II.*

I DAto quocunque ex quæsitis in Sect. 1. cap 11. vnâ cum Z, dantur ipsi numeri suppositi A & E.

Si detur differentia X: quoniam differentia ibi, per suppositionẽ vocalis A pro numero maiore ignoto, fuit 2A—Z: erit 2A—Z = X. quare $A = \frac{Z+X}{2}$. Item quoniam differentia ibi per suppositionem vocalis E pro numero minore ignoto fuit Z—2E: erit Z—2E = X. quare $E = \frac{Z-X}{2}$. vt si Z sit 10, & X 4; erit $A = \frac{10+4}{2}$ hoc est 7: Et $E = \frac{10-4}{2}$ hoc est 3.

Si detur rectangulum sub ipsis P: quoniam ibi per suppositionem ignotorum numerorum rectangulum fuit ZA—Aq, vel ZE—Eq: erit ZA—Aq = P, vel ZE—Eq = P: cuius generis æquationum solutio numerosa tradetur in 5 c 19. Si detur summa quadratorum Z: quoniam ibi per suppositionẽ numerorum ignotorum summa quadratorum fuit Zq—2ZA +2Aq, vel Zq—2ZE+Eq: erit $ZA—Aq = \frac{Zq—Z}{2}$, vel $ZE—Eq = \frac{Zq—Z}{2}$.

Si detur differentia quadratorum X: quoniam ibi per suppositionem ignotorum numerorũ differentia qua-

quadratorum fuit $2ZA - Zq$, vel $Zq - 2ZE$: erit $A = \frac{Zq + X}{2B}$, vel $E = \frac{Zq - X}{2Z}$. vt si Z sit 10, & X 40; erit $A = \frac{100+40}{20}$ & $E = \frac{100-40}{20}$.

2 Dato quocunque ex quæsitis in Sect. 2 cap. 11, vnâ cum X, dantur ipsi numeri suppositi A & E.

Si detur sũma Z: quoniam ibi per suppositionem summa fuit $2A - X$, vel $2E + X$; erit $2A - X = Z$, vel $2E + X = Z$: quare $A = \frac{Z+X}{2}$, & $E = \frac{Z-X}{2}$: vt ante.

Si detur rectangulum sub ipsis P: quoniam ibi per suppositionem rectangulum fuit $Aq - XA$, vel $Eq + XE$: erit $Aq - XA = P$, vel $Eq + XE = P$. huius posterioris generis æquationum solutio numerosa tradetur in 6 cap. 19.

Si detur summa quadratorum Z: quoniam ibi per suppositionem summa quadratorũ fuit $2Aq - 2XA + Xq$, vel $2Eq + 2XE + Xq$: Erit $Aq - XA = \frac{Z - Xq}{2}$, vel $Eq + XE = \frac{Z - Xq}{2}$.

Si detur differentia quadratorum X: quoniam ibi per suppositionem differentia quadratorum fuit $2XA - Xq$, vel $2XE + Xq$: erit $A = \frac{X + Xq}{2X}$, & $E = \frac{X - Xq}{2X}$.

3 Dato quocunque ex quæsitis in Sect. 3. cap. 11, vnâ cum ratione maioris ad minorem R ad S; dantur ipsi numeri suppositi A & E.

Si

Si detur summa Z: quoniam ibi per suppositionem summa fuit $\frac{RA+SA}{R}$, vel $\frac{RE+SE}{S}$: Erit $\frac{RA+SA}{R} = Z$, & $\frac{RE+SE}{S}$ Z: quare $A = \frac{ZR}{R+S}$, & $E = \frac{ZS}{R+S}$. vt si Z sit 10, & R 21, & S 9, erit $A = \frac{10 \times 21}{30}$, & $E = \frac{10 \times 9}{30}$.

Si detur differentia X: quoniam ibi per suppositionem differentia fuit $\frac{RA-SA}{R}$, vel $\frac{RE-SE}{S}$: erit $A = \frac{XR}{R-S}$, & $E = \frac{XS}{R-S}$.

Si detur rectangulum P: quoniam ibi per suppositionem rectangulum fuit $\frac{SAq}{R}$, vel $\frac{REq}{S}$: erit $A = \sqrt{q}\,\frac{PR}{S}$, & $E = \sqrt{q}\,\frac{PS}{R}$.

Si detur summa quadratorum Z: quoniam ibi per suppositionem summa quadratorum fuit $\frac{RqAq+SqAq}{Rq}$, vel $\frac{RqEq+SqEq}{Sq}$: Erit $Aq = \frac{ZRq}{Rq+Sq}$, & $Eq = \frac{ZSq}{Rq+Sq}$.

Si detur differentia quadratorum X: quoniam ibi per suppositionem differentia quadratorum fuit $\frac{RqAq-SqAq}{Rq}$, vel $\frac{RqEq-SqEq}{Sq}$: Erit $Aq = \frac{XRq}{Rq-Sq}$ & $Eq = \frac{XSq}{Rq-Sq}$.

4 Dato quocunque ex quæsitis in sect. 4 cap. 11, vnâ cum P: dantur ipsi numeri suppositi A & E.

Si detur summa Z: quoniam ibi per suppositionem summa fuit $\frac{Aq+P}{A}$, vel $\frac{P+Eq}{E}$: Erit $\frac{Aq+P}{A} = Z$, vel $\frac{P+Eq}{E} = Z$: Quare $ZA - Aq = P$, & $ZE - Eq = P$. Si

Si detur differentia X: quoniam ibi per suppositionem differentia fuit $\frac{Aq-P}{A}$, vel $\frac{P-Eq}{E}$: Erit $Aq - XA = P$, & $Eq + XE = P$.

Si detur summa quadratorum Z: quoniam ibi per suppositionem summa quadratorum fuit $\frac{Aqq+Pq}{Aq}$, vel $\frac{Pq+Eqq}{Eq}$; erit $ZAq - Aqq = Pq$, & $ZEq - Eqq = Pq$. cuius generis æquationum solutio numerosa tradetur in 5 & 6 cap. 11.

Si detur differentia quadratorum X: quoniam ibi per suppositionem differentia quadratorum fuit $\frac{Aqq-Pq}{Aq}$, vel $\frac{Pq-Eqq}{Eq}$: Erit $Aqq - XAq = Pq$, & $Eqq + XEq = Pq$.

---

## Cap. XVIII.

### *Alia tabula posterioris in cap. 12. inspectio quoad æquationes.*

1 Sciendum autem primò est, quòd in sequentibus, tum breuitatis, tum phantasiæ iuuandæ gratia, passim ferè his verborum symbolis vtor. A significat numerum, siue lineam propositam maiorem. E minorem. Æ rectangulum sub ipsis Z est summa A + E. X est differentia A — E. Z est summa quadratorum Aq + Eq. X est differentia quadratorum Aq — Eq. Z est summa cuborum Ac + Ec. X est differentia cuborum Ac — Ec. Tres continuò proportionales

portionales A.M.E. quattuor A.M.N.E.

2 A binomia radice A + E potestatum species omnes sunt adfirmatæ. A residuo verò A - E potestatum species omnes alternè sunt negatæ. Q: A — E: est Aq — 2 AE + Eq. C: A — E: est Ac — 3 AqE + 3 AEq - Ec. QQ: A — E: est Aqq - 4 AcE + 6 AqEq — 4 AEc + Eqq. Adeò vt, Si potestatis cuiusuis species alternatim sumptæ in duas summas aggregentur: harum summarum connexio cum signo radicis, erit radicis ipsius potestas. Atque hæc est Binomiorum quadratorum, cubicorum, aliorumque constitutio. Nam summæ illæ sunt binæ partes binomiorum.

3 Quare latus homogeneum differentiæ partium illarum, siue nominum, in qualibet potestate, est differentia nominum radicis. Exempli gratia, Ac + 3 AEq m 3 AqE + Ec, vel Ac + 3 AEq - 3 AqE — Ec, est C: A — E.

4 Et latus homogeneum differentiæ quadratorum è partibus potestatis cuiusque, est differentia quadratorum e nominibus radicis. Exempli gratia, Q: Ac + 3 AEq: m Q: 3 AqE + Ec: est C: Aq — Eq: Nempe Acc — 3 AqqEq + 3 AqEqq — Ecc: sicut ex multiplicatione adparebit.

5 Per additionem.

$$\begin{array}{l} A + E = Z \\ A - E = X \\ \hline 2A = Z + X \end{array}$$

Per subductionem:

$$\begin{array}{l} A + E = Z \\ A - E = X \\ \hline 2E = Z - X \end{array}$$

Per multiplicationem.

$$\begin{array}{l} A + E = Z \\ A - E = X \\ \hline Aq - Eq = ZX = X. \end{array}$$

6 Q

6 $Q{:}A + \frac{1}{2}E{:} = Z + AE - \frac{3}{4}Eq$. et $Q{:}E + \frac{1}{2}A = Z + AE - \frac{3}{4}Aq$. Datis igitur summa quadratorum à tribus continuè proportionalibus, & vno extremorum, dantur reliqui.

7 Per Additionem. Per subductionem.

$$\begin{array}{ll} Aq + 2AE + Eq = Zq & Aq + 2AE + Eq = Zq \\ Aq - 2AE + Eq = Xq & Aq - 2AE + Eq = Xq \\ \hline 2Aq + 2Eq = Zq + Xq = Z & 4AE = Zq - Xq \end{array}$$

$$\text{Quare } AE = \frac{Zq - Z}{2} = \frac{Z - Xq}{2} = \frac{Zq - Xq}{4}$$

$Z + 2Æ \text{ in } Z - 2Æ = Xq = ZqXq$. per 5.

8 $ZÆ = AqE + AEq$. $ZÆ = AcE + AEc$

$XÆ = AqE - AEq$. $XÆ = AcE - AEc$.

$ZZ = Z + ZÆ = Ac + AqE + AEq + Ec$.

$ZX = X - XÆ = Ac - AqE + AEq - Ec$.

$XZ = X + XÆ = Ac + AqE - AEq - Ec$.

$XX = Z - ZÆ = Ac - AqE - AEq + Ec$.

$Z + 3ZÆ = Zc$; $X - 3XÆ = Xc$.

$ZZ + XX = 2Z$. $XZ + XX = 2X$.

$ZZ - XX = 2ZÆ$. $XZ - XX = 2XÆ$.

$Zq - Xq = 4Æc$.

9 Si sint A. M. N. E ∺

erit $Q{:}A + 2N{:} - Q{:}2M + E = Aq - Eq{:}$

& $Q{:}A - 2N{:} + Q{:}2M - E = Aq + Eq$.

10 Si sint E. M. A. 2E ∺

erit $Q{:}A + M{:} - Q{:}M + E = 3Eq{:}$

Atque hoc modo infinitæ aliæ æquationes poterunt produci.

11 Omnes cuiusque ordinis intermediæ species sunt etiam potestates mediorum inter A & E proportionalium,

tionalium. Inter Ac & Ec sunt duæ mediæ proportionales AqE & AEq: qui sunt cubi ex M & N. Quare A. √cAqE. √cAEq. E, sunt continuè proportionales, nempe A. M. N. E. Itaque etiam MNA = AqE = Mc. Et MNE = AEq = Nc. Consect.

Atque hinc patet inuentio quotlibet mediorum continuè proportionaliũ inter A & E. vt si velis quinque medios proportionales, potestates erunt $\boxed{6}$ vel cc, quarum index vnitate excedit numerum mediorum quæsitorum: eruntque A. √ccAqcE. √ccAqqEq. √ccAcEc. √ccAqEqq. √ccAEqc. E ∺

12 Omnis media species in vnoquoque genere fit ex duabus nominum radicis potestatibus, quarum indices simul æquales sunt indici eiusdem generis; mediæ autem ipsius speciei ab extremis suis distantiæ æquales sunt indicibus alternarum facientium; et facientibus suis in communi angulo respondent. Exempli gratia AqEc generis quadrato-cubici fit ex Aq in Ec: quibus in communi angulo respondet. Estque ab Aqc tertia, & ab Eqc secunda. Consect.

Atque hinc facile erit, Radicis binomiæ datæ potestatem quamlibet (inuentis omnibus medijs inter potestates nominum extremas) construere.

Aqc
Aqq
Ac
Aq
A
√P
P
√Pc
Pq
5√PAqcc
10PAc
10√PcAqq
5PqA
√Pqc

Vt in exemplo, Radicis A + √P quadrato-cubus est Aqc + 10PAc + 5PqA plus 5√PAqcc + 10√PcAqq + √Pqc; quod binomium

binomium est quadrato-cubicum. per 2 huius, & 4 cap. 12.

13 Si species aliqua multiplicetur per differentiam A—E, vel X: producta magnitudo erit differentia inter duas species ordinis superioris vtrinque proximas. vt Aqq X = Aqc - AqqE: & AcEX = AqqE —AcEq. &c. Et si omnes species multiplicentur per A—E vel X, producetur differentia duarum potestatum extremarum ordinis superioris. vt Aqq + AcE + AqEq + AEc + Eqq, ductæ in X, fient Aqc—Eqc.

14 In ordinibus terminorum imparium, summa duarum extremarum potestatum sequentium; at in ordinibus terminorum parium, differentia earundem; fit è summa laterum A + E ducta in singulas species alternatim affirmatas, & negatas. vt Aq - AE + Eq ductæ in A + E, fient Ac + Ec. et Ac—AqE + AEq —Ec ductæ in A + E, fient Aqq - Eqq.

15 Et si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipsis factæ erunt contrariæ. vt Aq - 2 AE + Eq ductæ in A - E, fiet Ac - 3 AqE + 3 AEq - Ec. at verò eadem ducta in - A + E, fiet - Ac + 3 AqE - 3 AEq + Ec.

16 Vnciæ, siue numeri speciebus affixi, sunt figuræ numerariæ. Nam omnes sub A, vel E sunt radices: Omnes sub Aq, vel Eq sunt triangulares: Omnes sub Ac, vel Ec sunt pyramidales: omnes sub Aqq, vel Eqq sunt triangulo-triangulares: omnes sub Aqc, vel Eqc sunt triangulo-pyramidales: Omnes sub Ecc, vel Ecc sunt pyramidi-pyramidales, et sic de reliquis.

## Cap. XIX.

### SECVNDI ELEMENTI EVCLIDIS *traditio, pro usu æquationis Analyticæ.*

1 SI $Z = A + E + I$: erit $ZB = BA + BE + BI$, per 5 c. 4.

2 Si $Z = A + E$ erit $Zq = ZA + ZE$. per 5 c. 4.

3 Si $Z = A + E$: erit $ZA = Aq + AE$. & $ZE = AE + Eq$. per 5 c 4.

4 Si $Z = A + E$: erit $Zq = Aq + Eq$ (hoc est Z) $+ 2AE$. per 5 c 4.

Atque hæc regula est quadrationis laterum etiam irrationalium: de quibus agit Euclides elemento decimo.

Quadretur $2 + \sqrt{q}\,3$ Binomium. Z est $4 + 3$. Æ est $\sqrt{q}\,12$. quadratum igitur est $7 + \sqrt{q}\,48$.

Quadretur $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$, Bimediale prius. Z est $\sqrt{q}\,12 + \sqrt{q}\,\frac{27}{4}$; hoc est per 7 cap. 15, $\sqrt{q}\,\frac{147}{4}$. Æ est $\sqrt{q}\,\frac{36}{4}$, hoc est 3. quadratum igitur est $\sqrt{q}\,\frac{147}{4} + 6$.

Quadretur $\sqrt{qu}: \frac{7}{2} + \sqrt{q}\,\frac{29}{4}$: pl $\sqrt{qu}: \frac{7}{2} - \sqrt{q}\,\frac{29}{4}$, Maior. quadratum huius erit $7 + \sqrt{q}\,20$. Nam

$$Z \text{ est} \begin{cases} \frac{7}{2} + \sqrt{q}\,\frac{29}{4} \\ \frac{7}{2} - \sqrt{q}\,\frac{29}{4} \\ \hline \text{est } 7 \end{cases} \qquad Æ \text{ sub} \begin{cases} \left.\begin{matrix} \sqrt{qu}: \frac{7}{2} + \sqrt{q}\,\frac{29}{4} \\ \sqrt{qu}: \frac{7}{2} - \sqrt{q}\,\frac{29}{4} \end{matrix}\right\} \text{est} \\ \hline \sqrt{qu}: \frac{49}{4} - \frac{29}{4}, \text{ hoc est } \sqrt{q}\,5. \end{cases}$$

5 Si linea bisecetur & secus: quadratum bisegmenti, minus rectangulo sub segmentis inæqualibus, æquatur quadrato intersegmenti, siue semi-differentiæ

E segmen-

ſegmentorum. hoc eſt, Si $Z = A + E$: erit $\frac{1}{4}Zq - AE = Q: \frac{1}{2}Z - E$, ſiue $\frac{1}{4}Xq$.

Datis igitur linea inæqualiter ſecta $Z$ (10), & rectangulo ſub ſegmentis $Æ$ (21) qui gnomon eſt; datur ſemi-differentia ſegmentorum $\frac{1}{2}X$: & per conſequens ipſa ſegmenta. Nam ponatur alterutrum ſegmentum $A$: alterum erit $Z - A$: Rectangulum autem eſt $ZA - Aq = Æ$. Et quia dantur $Z$ & $Æ$: eſtque $\frac{1}{4}Zq - Æ = \frac{1}{4}Xq$: & per 2 c 18, $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}X = A$; & $\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}X = E$: Æquatio ſic reſoluetur:

$$\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{q}: \frac{1}{4}Zq - Æ: = A \begin{cases} \text{maius ſegment.} \\ \text{minus ſegment.} \end{cases}$$

Itaque propoſita æquatione, in qua ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine tabellæ adſcendentes, altiſſima autem ſpecies ponitur negata: Magnitudo data coefficiens mediam ſpeciem eſt linea biſecandæ: & magnitudo abſoluta data, ad quam fit æquatio, eſt rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus, ſiue gnomon: vt $ZA - Aq = Æ$: in numeris autem $10\,I - 1q = 21$: Eſtque $A$, vel $1\,I$, alterutrum ſegmentum inæquale. Inuenitur autem ſic:

Dimidiata coefficiens mediam ſpeciem eſt $\frac{Z}{2}$ (5); cuius quadratum eſt $\frac{Zq}{4}$ (25): ex hoc tolle $Æ$ (21) abſolutum: eritque $\frac{Zq}{4} - Æ$ (4) quadratum ſemidifferentiæ ſegmentorum: latus huius quadratum $\sqrt{q}: \frac{Zq}{4} - Æ$ (2) eſt ſemidifferentia: quam ſi addas ad $\frac{Z}{2}$ (5) ſemiſſem coefficientis, ſiue lineæ biſecandæ,

erit

erit maius segment.; sin detrahas, erit minus segment:
Dico $\frac{Z}{2} \pm \sqrt{q}: \frac{Zq}{4} - Æ: = A \begin{cases} \text{maius segmentum.} \\ \text{minus segmentum.} \end{cases}$

Quod si media species sit quadratum, vel cubus, vel alia potestas superior, vt 13q — 1qq = 36; vel 35c — 1cc = 216; ex numero inuento latus etiam pro suo genere erui debet.

6 Si linea bisecta augeatur: quadratum bisegmenti, plus rectangulo sub tota aucta & augmento, æquatur quadrato bisegmenti aucti. hoc est: Si ad Z apponatur augmentum, puta A ignotum: erit $\frac{1}{4}Zq + \square Z + A \text{ in } A = Q: \frac{1}{2}Z + A$.

Datis igitur Z (6), & rectangulo Æ (40) qui gnomon est: datur dimidium auctum: & per consequens tum tota aucta, tum augmentum. Nam ponatur, inquam, augmentum A: tota aucta erit Z + A: et rectangulum Aq + ZA = Æ. Rursus ponatur tota aucta A: augmentum erit A — Z: et rectangulum Aq — ZA = Æ. Et quia dantur Z & Æ: estque $\frac{1}{4}Zq + Æ = Q: \frac{1}{2}Z + E$ dimidij aucti: Æquatio sic resoluetur.

$\sqrt{q}: \frac{1}{4}Zq + Æ: \pm \frac{1}{2}Z = A \begin{cases} \text{tota aucta.} \\ \text{augmentum.} \end{cases}$

Itaque proposita æquatione, in qua sunt tres species æqualiter in ordine tabellæ adscendentes, altissima autem species ponitur adfirmata: Magnitudo data coefficiens mediam speciem est linea bisecanda: et magnitudo absoluta, data, ad quam fit æquatio, est rectangulum sub tota aucta & augmento, siue gno-

 mon;

mon: vt $Aq - ZA = Æ$: in numeris autem $1q - 6l = 40$: estque A, vel 1l, tota aucta, vel $Aq + ZA = Æ$; in numeris autem $1q + 6l = 40$: estque A, vel 1l, augmentum. Inuenietur autem sic;

Dimidiata coefficiens mediam speciem est $\frac{Z}{2}$ (5), cuius quadratum est $\frac{Zq}{4}$ (9): huic adde Æ (40) absolutum; eritque $\frac{Zq}{4} + Æ$ (49) quadratum bisegmenti aucti: latus huius quadratum $\sqrt{q}: \frac{Zq}{4} + Æ$: (7) est bisegmentum auctum. Cui si addas $\frac{Z}{2}$ (5) semissem coefficientis, siue lineæ bisecandæ, erit tota aucta: sin detrahas, erit augmentum. Dico

$$\sqrt{q}: \frac{Zq}{4} + Æ: \pm \frac{Z}{2} = A \begin{cases} \text{tota aucta.} \\ \text{augmentum.} \end{cases}$$

Quod si media species sit quadratum, vel cubus, vel alia potestas superior, vt $1qq \mp 24q = 64$, vel $1cc \pm 19c = 216$; ex numero inuento latus etiam pro suo genere erui debet.

Quare quotiescunque datur æquatio, in qua sunt tres species iuxta aliquam è tribus conditionibus præcedentibus; quibuscunque insigniantur notis: cogitabis altissimam speciem incognitam esse instar Aq: & magnitudinem mediæ speciei incognitam esse instar A: coefficientem vero eius cognitam esse instar Z: & magnitudinem absolutam cognitam, ad quam fit æquatio, esse instar Æ: Æquatio autem resoluetur iuxta regulas præcedentes. Exempli gratia, proponatur tertiæ conditionis æquatio, $Aq + \frac{ZS}{R} A = \frac{ZqS}{R}$. In hac æquatione coefficiens $\frac{ZS}{R}$ data

data inſtar Æ gnomonis. inuenietur autem A ſic: Biſecetur $\frac{ZS}{R}$; & ſemiſſis $\frac{ZS}{2R}$ quadrato $\frac{ZqSq}{4Rq}$ addatur gnomon $\frac{ZqS}{R}$: eritque $\frac{ZqSq}{4Rq} + \frac{ZqS}{R}$ quadratum: biſegmenti aucti: cuius radix $\sqrt{q}$: $\frac{ZqSq}{4Rq} + \frac{ZqS}{R}$: eſt biſegmentum auctum: E quo ſi tollas biſegmentum ſiue ſemiſſem illum $\frac{ZS}{2R}$, reſtabit augmentũ, $\sqrt{q}$: $\frac{ZqSq}{4Rq} + \frac{SqS}{R} - \frac{ZS}{2R}$; quæ menſura eſt magnitudinis A quæſitæ.

Iterum proponatur æquatio ſecundæ conditionis $BCq - BK \times BC = 2CAq$. In hac BK coefficiens data eſt inſtar Z lineæ biſecandæ; & 2CAq abſoluta data inſtar Æ gnomonis: Et quæſitæ BCq, & BC, inſtar Aq & A. Inuenietur autem BC ſic. Biſecetur BK; & ſemiſſis $\frac{BK}{2}$ quadrato $\frac{BKq}{4}$ addatur gnomon 2CAq: eritque $\frac{BKq}{4} + 2CAq$ quadratum biſegmenti aucti: cuius radix $\sqrt{q}$: $\frac{BKq}{4} + 2CAq$: eſt biſegmentum auctum. Cui ſi adiungas biſegmentum ſiue ſemiſſem illum $\frac{BK}{2}$, conflabitur tota aucta $\sqrt{q}$: $\frac{BKq}{4} + 2CAq$: $+ \frac{BK}{2}$; quæ menſura eſt magnitudinis BC quæſitæ.

Denique proponatur æquatio primæ conditionis, in numeris, $73l - 1q = 1260$. Biſecetur coefficiens 73, & ſemiſſis $\frac{73}{2}$ quadrato $\frac{5329}{4}$ auferatur abſolutus 1260, reſtabit $\frac{289}{4}$, cuius latus quadratum eſt $\frac{17}{2}$ ſemi-differentia ſegmentorum: quæ ſemi-ſum-

$73l - 1q = 1260$

$\frac{73}{2}$ $\frac{5329}{4} - \frac{5040}{4}$ ℞ $\frac{289}{4}$ $\frac{17}{2}$

$\frac{73}{2} + \frac{17}{2}$ eſt 45. maius ſegm.

$\frac{73}{2} - \frac{17}{2}$ eſt 28, minus ſegm.

mæ $\frac{73}{2}$ tum addendum est tum auferendum.

7 Si linea vtcunque secta multiplicetur in alterutrum suum segmentum: rectangulum illud duplicatum, plus quadrato alterius segmenti, æquale erit quadratis totius & segmenti multiplicantis. hoc est, Si $Z = A + E$: erit $2ZA + Eq = Zq + Aq$. Et $2ZE + Aq = Zq + Eq$.

8 Si linea vtcunque secta multiplicetur in alterutrum suum segmentum: rectangulum illud quadruplicatum, plus quadrato alterius segmenti, æquale erit quadrato lineæ totius auctæ segmento multiplicante. hoc est, Si $Z = A + E$: erit $Q{:}Z + A{:} = 4ZA + Eq$. Et $Q{:}Z + E{:} = 4ZE + Aq$.

9 Si linea bisecetur & secus: quadrata segmentorum inæqualium simul duplicia sunt quadratorum bisegmenti & intersegmenti. hoc est, Si $Z = A + E$ erit $Aq + Eq = \frac{1}{2}Zq + \frac{1}{2}Xq$.

10 Si linea bisecta augeatur: quadrata totius auctæ & augmenti, simul duplicia sunt quadratorum bisegmenti, & bisegmenti aucti. hoc est, Si $Z = A + E$: erit $Zq + Eq = \frac{1}{2}Aq + 2Q\,\frac{1}{2}A + E$.

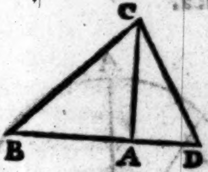
11 Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota & minore segmento æquale sit quadrato maioris. hoc modo, Si $Z = A + E$, sitque $\sqrt{q}\,\frac{5}{4}Zq - \frac{1}{2}Z = A$: erit $ZE = Aq$. Nam $\frac{5}{4}Zq = Q{:}\frac{1}{2}Z + A{:} = \frac{1}{4}Zq + ZA + Aq$. Quare $ZA + Aq = Zq = ZA + ZE$. Ergo.

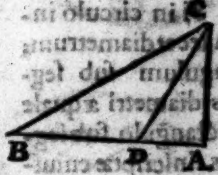
Atque

Atque hinc patet modus secandi datam lineam Z secundum mediam & extremam rationem: hoc est vt sint Z. A. E ∺


12 In triangulo BCD, si ang. B sit acutus: BCq + BDq = DCq + 2BD × BA. Nam BCq — BAq = CAq = DCq — Q: $\overline{BD — BA}$

47 e 1 — BDq + 2BD × BA — BAq.



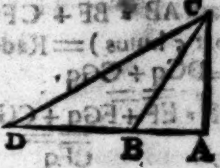




13 In triangulo BCD, si ang. B sit obtusus: BCq + BDq = DCq — 2BD × BA. Nam BCq — BAq = CAq

47 e 1

= DCq — Q: $\overline{BD + BA}$

— BDq — 2BD × BA — BAq



14 Dato rectangulo æquale quadratum constituere. hoc modo; $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = Æ$ per 5 huius, & 7 c 18.


His etiam visum est subiungere propositiones 35 & 36 elementi tertij Euclidis: quæ duo sunt theoremata multi vsus in re Analytica.

15 Si in circulo inscripta secet diametrum; rectangulum sub segmentis diametri æquale erit rectangulo sub segmentis inscriptæ cuiuscunque.


Dico $AF \times BF = DF \times EF$

Nam $AB \times BF + CFq$ (per 5 huius) $= Radq$

$= \underline{\underline{DGq}} + \underline{\underline{CGq}}$

$DF \times \overline{EF} + FGq + CGq$

$\underline{\underline{\quad}} \; \overline{CFq}$

16 Si a puncto extra circulum ducantur duæ rectæ, quarum vna circulum secat (siue per centrum, siue alibi) altera verò tangit: rectangulum sub tota

secante

secante & segmento exteriore, æquale erit quadrato tangentis. Dico BG $\times$ BF $=$ BTq $=$ BD $\times$ BK. Nam BTq $+$ Radq $=$ BCq $=$ BG $\times$ BF $+$ Radq $=$ BAq $+$ CAq $=$ BD $\times$ BK $+$ DAq $+$ CAq $=$ Radq


17 Addatur & hæc propositio: *Si quadrilaterum in circulo continebitur: rectangulum sub diagonijs, æquale est duobus rectangulis sub lateribus sibi inuicem oppositis.* Dico


AC $\times$ BD $=$ AB $\times$ DC $+$ AD $\times$ BC. Nam fiat ang. DCE $=$ ACB. erunt duo triangula DCE, ACB similia: item duo triangula BCE, ACD. per 32 e 1, & 21 e 3. Est igitur AC. AB :: DC. DE. & AC. AD :: BC. BE.

Quare AB $\times$ DC $=$ AC $\times$ DE $\}$ $=$ BD. Ergo.
& AD $\times$ BC $=$ AC $\times$ BE $\}$

18 Ad hæc, futurum Analystam geometrica ſtrita, atque communia, non oportet ignorare.

Datis tribus lineis quartam proportionalem inuenire. 12 e 6.

Datis duabus lineis tertiam continuè proportionalem inuenire. 11 e 6.

Datis duabus lineis mediam proportionalem inuenire. 13 e 6

Similium figurarum latera eſſe proportionalia. per 4 e 6.

Triangula ſiue parallelogramma æquè alta eſſe vt baſes. 1 e 6.

Angulum in ſemicirculo eſſe rectum. 31 e 3.

In triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto in hypotenuſam, diuidere triangulum in duo triangula, tum toti, tum ſibi ipſi ſimilia. 8 e 6.

Vnde ſequitur perpendicularem eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta hypotenuſæ.

Et Baſim eſſe mediam proportionalem inter hypotenuſam, & ſegmentum hypotenuſæ baſi conterminum.

Et cathetum eſſe mediam proportionalem inter hypotenuſam, & ſegmentum hypotenuſæ catheto conterminum.

Et Baſis atque Catheti quadrata eſſe, vt ſegmenta hypotenuſæ contermina.

In triangulo rectangulo quadratum hypotenuſæ æquari quadratis Baſis atque catheti ſimul. 47 e 1.

Vnde liquet, Quadratum quadrato addere:

Et quadratum ex quadrato tollere:

Trian-

Triangula vnum angulum æqualem habentia, vel etiam parallelogramma æqui-angula, rationem habere eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Angulos ſuper æquales periferias eſſe æquales: 21 e 3.

Et angulum ad centrum duplus eſſe anguli ad periferiam. 20 e 3.

---

## CAP. XX.

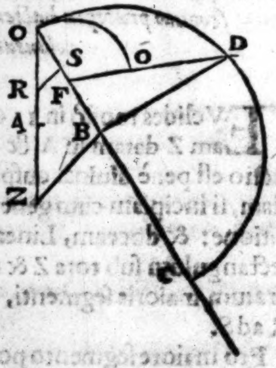
*Exempla æquationis analyticæ, pro theorematibus inueniendis, problematibuſque ſoluendis, ad quem quaſi ſcopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.*

1 EVclides modò in 11 cap, 19, docuit ſecare lineam Z datam in A & E, ſic ut ZE $=$ Aq: quæ ſectio eſt penè diuina. auſpicatò igitur (vti ſpero) faciam, ſi incipiam cum generali problematis illius traditione: & doceam, Lineam Z datam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota Z & minore ſegmento, ad quadratum maioris ſegmenti, datam habeat rationem R ad S.

Pro maiore ſegmento ponatur A. minus erit Z—A: rectangulum Zq—ZA. Eſt autem Zq—ZA. Aq :: R. S. quare per 4 c 6, ZqS — ZSA $=$ RAq. uel per 5 c 16, RAq + ZSA $=$ ZqS: vel per 6 c 16, Aq

$Aq + \frac{ZSA}{R} = \frac{Zqs}{R}$. Ergo per 6 cap. 19. $\surd q: \frac{Zqs}{4Rq} + \frac{ZqS}{R} : - \frac{ZS}{2R} = A$. Hoc theorema inuentum verbis sic enunciabitur: Si ad quotum facti a quadratis lineæ datæ, & lineæ posterioris similis, diuisi per quadratum lineæ similis prioris quadruplicatum, addatur quotus facti a quadrato lineæ datæ, & simili posteriore, diuisi per similem priorem: & ex aggregati latere quadrato tollatur quotus facti ex linea data, & simili posteriore, diuisi per similem priorem duplicatum: reliquum erit segmentum maius.

Geometricè sic. Esto $OZ = Z$; & $OR = R$; & $OS = S$. fiatque angulus, vt in schemate. ducatur RS: ipsique parallela ZB: & mensuretur $BC = OZ$. diametro OC fiat semicirculus: & super B punctum statuatur BD ad angulos rectos. Bisecetur OB in F: & iungatur FD. Quoniam est OR. OS :: OZ. OB: erit $OB = \frac{ZS}{R}$: & OF vel $BF = \frac{ZS}{2R}$: & $BFq = \frac{ZqSq}{4Rq}$: & OB $\times$ BC vel $BDq = \frac{ZqS}{R}$. quare FD

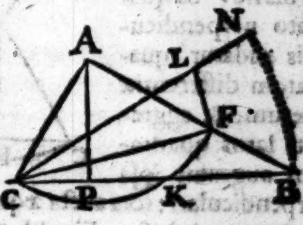



$= \surd q: \frac{ZqSq}{4Rq} + \frac{ZqS}{R}$: Ex quo si demas $OF = \frac{ZS}{2R}$, restabit DO pro maiore segmento OA. Secatur igitur

linea

linea Z data in A puncto sicut postulatum est.

2 Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto secat hypotenusam) una cum BK differentia segmentorum hypotenusæ, inuenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum. Primò detur latus minus CA. Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC: in quo è vertice in hypotenusam demittatur perpendicularis AP, secans hypotenusam in BP & CP segmenta. Est autem $CP = \frac{BC-BK}{2}$. Quia est BC. CA :: CA. $\frac{BC-BK}{2}$. erit $\frac{BCq - BC \times BK}{2} = CAq$: vel $BCq - BK \times BC = 2CAq$. quare per 6 c 19, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}BKq + 2CAq : + \frac{1}{2}BK = BC$. Enunciatur autem hoc theorema verbis sic: Si quadratum semidifferentiæ segmentorum hypotenusæ addatur duobus quadratis lateris dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipsa semi-differentia: tota aucta æqualis erit hypotenusæ.



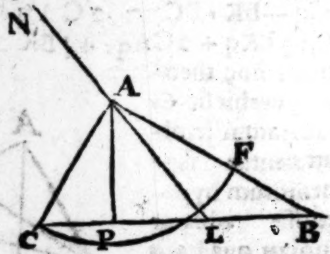

Geometricè sic. Ducatur CF: ipsique perpendicularis $FL = \frac{BK}{2}$. & extendatur CL ad N, vt $LN = \frac{1}{2}BK$. Erit CN = BC, quare in-scribatur circulo CK = CN − BK: & producatur, &c. Nam $CFq = 2CAq$. & $CLq = 2CAq + \frac{1}{4}BKq$. Ergo.

Si

Si verò detur maius latus BA; huius-modi inuenietur æquatio, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}BKq + 2BAq: - \frac{1}{2}BK = BC$. Et modus geometricus priori non absimilis.

3 Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perdendiculari AP ab angulo recto in hypotenusam: inuenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 c 19, $BFq = (ABq + AFq$, hoc est$)$ $BCq - (BA \times 2CA$. hoc est$)$ $BC \times 2AP$, quia BC.CA :: BA.AP. Erit $BCq - 2AP \times BC = BFq$. quare per 6 c 19, $\sqrt{q}: APq + BFq: + AP = BC$.




Enunciatur autem hoc theorema verbis sic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum, & aggregati latus quadratum augeatur ipsa perpendiculari: tota aucta æqualis erit hypotenusæ.

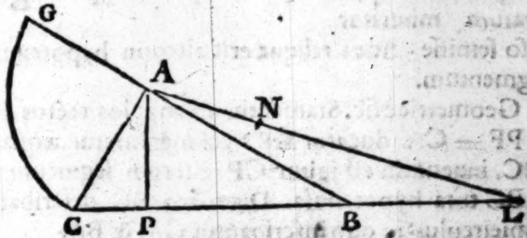
Geometricè sic. Fiat $PL = BF$. Et extendatur LA ad N, vt $AN = AP$. Erit $LN = BC$. Diametro igitur BC describatur semicirculus; in quo statuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

4 Datis summa laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenusam,

AP:

AP: inuenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 c 19, BGq = (BAq + GAq, hoc est) BCq + (2 BA × CA, hoc est) 2 AP × BC, quia BC. CA ∷ BA. AP. Erit BCq + 2 AP × BC = BGq. quare per 6 c 19, √q: APq + BGq: − AP = BC.




Enunciatur aut hoc theorema sic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum summæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipsa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenusæ.

Geometricè sic. Fiat PL = BG. et ducatur AL: ex qua abscindatur AN = AP. Erit LN = BC. Diametro igitur BC describatur semicirculus, &c.

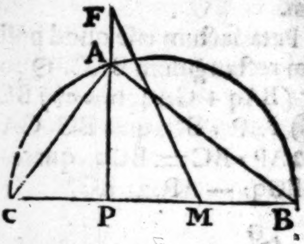
5 Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno segmento hypotenusæ BP: inuenire tum alterum segmentum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BP + CP. CA ∷ CA. CP. Erit BP × CP + CPq = CAq. quare

per

per 6 c 19, $\sqrt{q}: \frac{1}{4} BPq + CAq: - \frac{1}{2} BP = CP$.

Enuntiatur autem hoc theorema verbis sic. *Si quadrato semissis segmenti hypotenusæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipso semisse: linea reliqua erit alterum hypotenusæ segmentum.*

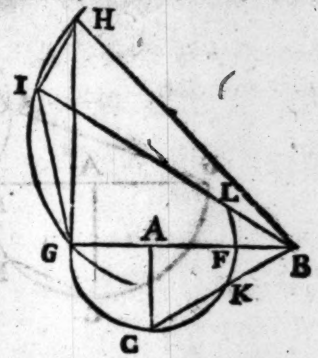



Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF = CA. ducatur MF: cui mensuretur æqualis MC. inuentum est igitur CP alterum segmentum: & BC tota hypotenusa. Diametro BC describatur semicirculus: in quo inscribantur CA, & BA.

6 Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & summa laterum BG: inuenire tum differentiam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BG.BK :: BC. BF, per 16 c 19: est etiam BGq.BKq :: (BCq. hoc est) BAq + CAq. BFq. Item 2BGq — BKq. BKq :: (2BAq + 2GAq — BFq, hoc est) BGq. BFq: Nam per 10 c 19 2BAq + 2CAq = BGq + BFq. quare $\sqrt{q}$: 2BGq — BKq. BG :: BK. BF :: BG. BC.

Enuntiatur autem hoc theorema verbis sic. Si



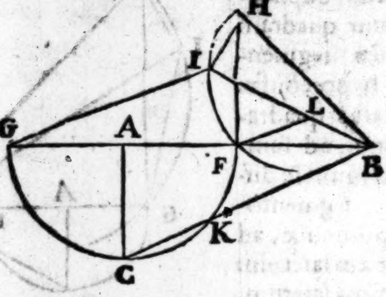

Si è quadrato summæ laterum duplicato tollatur quadratũ differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit vt latus quadratum reliqui, ad summam laterum; Sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad differentiam laterum: & sic summa laterum, ad hypotenusam.

Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH = BG: tum diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = BK: & ducatur BI. Est igitur BI = √q: 2BG — BK. fiat etiam BL = BK. Ducatur GI: eique parallela LF Ergo inuenta est BF differentia laterum.

7 Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & differentia laterum BF: inuenire tum summam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BF.BK :: BC.BG, per 16 c 19. est etiam BFq.BKq :: (BCq, hoc est) BAq + CAq BGq. Item 2BFq — BKq.BKq :: (2BAq + 2CAq — BGq, hoc est) BFq BGq. Nam per 10 c 19 2BAq + 2CAq = BGq + BFq. √q: 2BFq — BKq.BF :: BK.BG :: BF.BC.

F Enuncia-




Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ: Erit vt latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad ſummam laterum: & ſic differentia laterum, ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH = BF. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribatur BI = BK; & ducatur HI. Eſt igitur HI = √q: 2 BF—BK. fiat BL = HI. Ducatur FL; eique parallela IG. Ergo inuenta eſt BG ſumma laterum.

8 Datis trianguli plani cuiuſcunque differentia laterum FB, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter maius latus & baſem CL: inuenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum, Et primò ſit exceſſus penes baſem. Puta factum eſſe

BCD. der gegebene Triangell
CD. das kleiner Crus oder latg
BC. das größer Crus oder latg übertrifft
das kleiner mit BF. so datirt 7.
BD. Basis daran ACH. Perpend. theilt DK in halbier

esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est FB. BK :: BD. $\frac{BK \times BD}{BF} = BG$, per 16 c 19.

Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{2BF} = CF$. adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF}$

$= BC$. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF}$

$= \frac{2BF \times CL}{2BF}$. Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6: $2BF - BK . 2CL + BF :: BF . BD :: BK . BG$.

BK. duplum HD. übertrifft BD. mit BK. so datirt 9


BC. das grösser Crus von BD. subtrahiert CL. datis 4.

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. vt differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam segmentorum basis, est ad aggregatum differentiæ inter maius latus & basim duplicatæ, & differentiæ laterum; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometrica praxis facilior est, quàm vt necesse sit apponi.

Si

Duplum BF. ist 14. davon BK. bleibt 5.
Duplum CL. ist 8. darzu BF. ist 15
Setz zur Detri.
5. gibt -15. — was BF. 7. facit 21. BD.
5. gibt -15. — was BK. 9. facit 27. BG

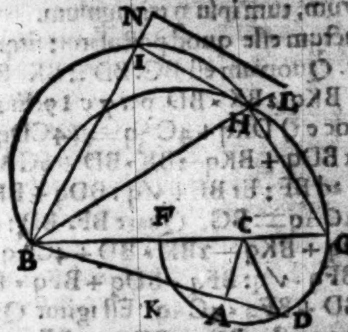
Si verò excessus fuerit penes maius latus; theorema erit, $BK - 2BF . 2CL - BF :: BF . BD :: BK . BG$.

Huius theorematis inuestigationem; & problematis, quo è datis trianguli plani cuiuscunque summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter maius latus & basem CL, postulatur inuenire tum basem, tum differentiã laterum, solutionem, omitto; vt habeant studiosi analyseos, quo solertiam suam exerceant.

9 Datis trianguli plani cuiuscunque summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: inuenire tum basem, tum differentiam laterum, tum ipsum triangulum. Puta factum esse quod postulatur; sitque triangulum BCD. Quoniam per 16 c 19, $BG . BD :: BK . BF$. Et per 7 c 19, $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$. Et per 47 e 1 ($4ADq$ hoc est) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$, hoc est) $FGq$ Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Tolle FG ex BG: & $BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq := BF$. Quare erit,

$BG . BD :: BK . BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Et per 3 c 6, $BK \times BD = BGq - \sqrt{q}: BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq$. Est igitur per 8 c 16 Q: $BGq - BK \times BD$, hoc est, $BGqq - \underline{BGq \times 2BK \times BD} + BKq \times BDq = BGq \times BDq + BGq \times BKq - \underline{BGq \times 2BK \times BD} + BGq \times 4CAq$. Ideóque $BGq \times BDq - BKq \times BDq = BGqq - BGq \times BKq - BGq \times 4CAq$. vel etiam, $BGq - BKq$ in $BDq = BGq - BKq - 4CAq$ in $BGq$. Ergo $\sqrt{q}: BGq - BKq . \sqrt{q}: BGq - BKq - 4CAq :: BG . BD :: BK . BF$.

Enun-



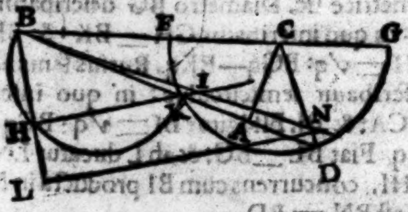

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. vt latus quadratum differentiæ inter quadrata summæ laterum, & differentiæ segmentorum basis, est ad latus quadratum eiusdem differentiæ mulctatæ quadrato perpendiculi duplicati; sic summa laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad differentiam laterum.

Geometricè sic. Diametro BG describatur semicirculus: in quo inscribatur GH = BK: & BH. Est igitur BH = √q: BGq — BKq. Rursus semidiametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = 2CA: & BI. Est igitur BI = √q: BGq — BKq — 4CAq. Fiat BL = BG: & ab L ducatur LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inuenta est BN = BD.

10 Datis trianguli plani cuiuscunque differentia laterum BF, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: inuenire tum basem, tum summam

mam laterum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est BG. BD :: BK. BF. Et $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$, per 7 c 19. Et per 47 e 1, (4ADq hoc est) $DKq + 4CAq =$ (4CDq, hoc est) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Adde FG ad BF: Et $BF + \surd q: \overline{BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq} = BG$. Quare BF. BD :: BK. $BF + \surd q: \overline{BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq}$. Item $BK \times BD = BFq + \surd q: \overline{BFq \times BDq + BFq \times BKq - BFq \times 2BK \times BD + BFq \times 4CAq}$. Est igitur $Q: \overline{BK \times BD - BFq}$, hoc est, $BKq \times BDq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFqq = BFq \times BDq + BFq \times BKq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFq \times 4CAq$. Ideóque $BKq \times BDq - BFq \times BDq = BFq \times BKq - BFqq + BFq \times 4CAq$. vel etiam $\overline{BKq - BFq}$ in $BDq = \overline{BKq - BFq + 4CAq}$ in BFq. Ergo $\surd q: \overline{BKq - BFq}$. $\surd q: \overline{BKq - BFq + 4CAq}$ :: BF. BD :: BK. BG.



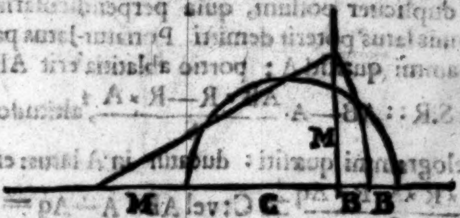

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. vt lateris quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ segmentorum basis, & differentiæ laterum, est ad latus

latus quadratum eiusdem differentiæ auctæ quadrato perpendiculi duplicati; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometricè sic. Diametro BK describatur circulus: in quo inscribatur KH = BF : & BH. Est igitur BH = √q: BKq — BFq. Fiat BHL = BF : & HKI = 2CA. Ducatur BI. Est igitur BI = √q : BKq — BFq + 4CAq. Ducatur etiam LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inuenta est BN = BD.

11 Datis in triangulo rectangulo differentia inter basem & hypotenusam B, & differentia inter cathetum & hypotenusam C; inuenire tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Pro hypotenusa ponatur A. Basis erit A—B. & Cathetus A — C & per 47 e 1, Cathetus est √q:2BA —Bq. Quare √q: 2BA—Bq = A—C. Et 2BA —Bq = Aq —2CA + Cq. vel 2B + 2C in A − Aq = Bq + Cq. Ergo per 5 c 19, B + C + √q 2BC = A, hypotenusæ.



Enuntiatur autem hoc theorema verbis sic, Aggregatum vtriusque differentiæ (tum basis tum catheti) ab hypotenusa, vnâ cum duplice rect angulo sub ipsis differentijs, æquatur hypotenusæ.

Geometricè, sic. Ducatur linea infinita in qua mensurentur B, B, & C. hac diametro fiat semicirculus. Et in communi B & C termino statuatur ad angulos rectos linea M. Est igitur M $=$ 2BC. mensuretur etiam M in linea infinita post C. Et semidiametro M + C + B describatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. tum a puncto concursus ad finem alterius M ducatur linea pro hypotenusa Et descriptum erit triangulum rectangulum quæsitum.

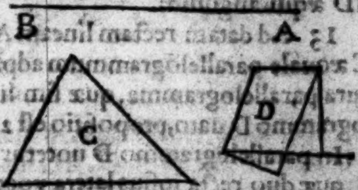
12 Ad datam lineam rectam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, deficiens figura parallelogrammo, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem &c. propositio est 28 elem: 6 Euclidis.

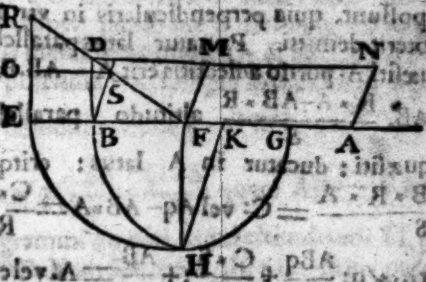
In parallelogrammo D notetur basis S, & altitudo R; quæ duo recta ipsius latera vocentur: sumi autem dupliciter possunt, quia perpendicularis in vtrumuis latus poterit demitti. Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A; portio ablatitia erit AB—A. Fiat S.R :: AB—A. $\frac{AB \times R - R \times A}{S}$, altitudo parallelogrammi quæsiti: ducatur in A latus: eritque $\frac{AB \times R \times A - R \times Aq}{S} = C$; vel $AB \times A - Aq = \frac{C \times S}{R}$:

&

& per 5 c 19, $\frac{AB}{2} + \sqrt{q}: \frac{ABq}{4} - \frac{C*S}{R}: = A.$ verùm si $\frac{C*S}{R}$ excedat $\frac{ABq}{4}$, mutetur in $\frac{C*R}{S}$; quia potuit etiam fieri R. S :: AB−A. &c.

Quod theorema verbis enuntiatur sic. Si rectilineum C datum ducatur in alterutrum latus rectum parallelogrammi D: & factus diuidatur per alterum: & quotus ex quadrato semissis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.




Geometricè autem sic. Fiat OR = R: & OS = S: & RE = $\sqrt{q}$C: Item OR. OS :: RE. EF. sitque

FG

FG = RE. Diametro EG describatur semicirculus, in quo super punctum F statuatur ad angulos rectos FH. & ducatur hypotenusa HK = $\frac{1}{2}$ AB: mensuretur etiam KA & KB = $\frac{1}{2}$ AB. Et quia RS : : RE (FG). BF : : FGq (C). FHq. Erit FHq = $\frac{C \times S.}{R}$ Estque FK = $\sqrt{q}: \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S!}{R}$ Quare AF = A latus parallelogrammi quæsiti: Cuius altitudo erit BL parallela lineæ RE: quia S.R : : AB — A.(BF) BL. Ergo parallelogrammum quæsitum est AFMN, factum ipsi D æqui-angulum.

13 Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato, propositio est 29 elem. 6 Euclidis.

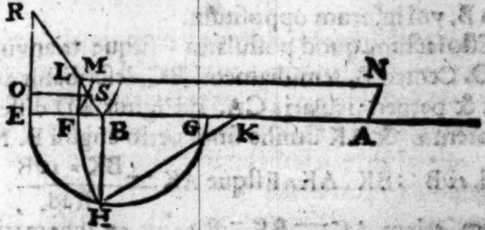
In parallelogrammo D notetur basis S, & altitudo R; quæ duo recta ipsius latera vocentur: sumi autem dupliciter possunt, quia perpendicularis in vtrumuis latus poterit demitti. Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A: portio adiectitia erit A — AB. Fiat S.R : : A−AB. $\frac{R \times A - AB \times R}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti: ducatur in A latus: eritque $\frac{R \times Aq - AB \times R \times A}{S}$ = C: vel Aq − AB × A = $\frac{C \times S.}{R.}$

Et per 6 c 19, $\sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R}: + \frac{AB}{2}$ = A. vel etiam $\sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C \times R}{S}: + \frac{AB}{2}$ = A: quia poterit

etiam

etiam fieri R. S :: A—AB. &c.

Quod theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in alterutrum latus rectum parallelogrammi D: & factus per alterum diuidatur: & quotus addatur quadrato semissis lineæ AB datæ, latus quadratum reliqui auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.




Geometrice autem sic. Fiat OR = R: & OS = S: & RE = $\sqrt{q}$C. Item OR. OS :: $\sqrt{q}$C. EB. & BG = $\sqrt{q}$ C: diametro EG describatur semicirculus, in quo super punctum F statuatur ad angulos rectos FH: mensuretur etiam KA & KB = ½ AB. Et ducatur hypotenusa HK, ipsique æqualis KF. liquet in priore demonstratione quod BHq = $\frac{C \times S}{R}$: & HK

= $\sqrt{q}$: $\frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R}$. quare AF = A latus parallelogrammi quæsiti, cuius altitudo erit FL parallela ipsi RE: Nam S.R :: A—AB. FL. Ergo parallelogrammum quæsitum est AFMN, factum ipsi D æquiangulum.

Et

Et quia in æquatione ſumi pro arbitrio poterit $\frac{C \times S}{R}$ vel $\frac{C \times R}{S}$: ſequitur problema hoc duplicem factionem admittere. quod nec notauit Euclides: nec quiſquam eius interpres (quod ſciam) obſeruauit.

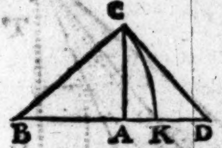
14 Datis trianguli plani cuiuſcunque duobus lateribus BC BD, cum angulo B intercepto: inuenire tertium latus. vel datis tribus lateribus: inuenire angulum B, vni ipſorum oppoſitum.

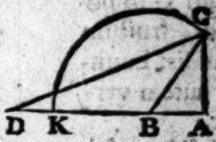
Eſto factum quod poſtulatur: ſitque triangulum BCD. Centro B, ſemidiametro BC, deſcribatur arcus CK: & perpendicularis CA. Eſt igitur KD differentia laterum: & AK ſimilis ſinui verſo anguli B. Nam Rad. $s v$B :: BK . AK. Eſtque $AK = \frac{BK \times s v B}{Rad.}$. Eſt autem etiam $AK = BK \mp BA$: vt ex ſchematibus comparatis liquet.

Et quia $BDq + BKq =$ tum
$$\left\{\begin{array}{l} 2BD \times BK + KDq. \text{ per } 7 \text{ c } 19 \\ CDq \pm 2BD \times BA. \text{ per } 12, 13, \text{ c } 19 \end{array}\right\}$$
Erit $2BD \times BK + KDq = CDq \pm 2BD \times BA$. Quare $2BD \times BK \mp 2BD \times BA$ hoc eſt $2BD \times AK + KDq = CDq$. at verò $2BD \times AK = \frac{2BD \times BC \times s v B.}{Rad:}$

Ergo $\frac{2BD \times BC \times s v B}{Rad:} + KDq = CDq$. Quod eſt theorema primum. Et $\frac{CDq - KDq \text{ in } Rad:}{2BD \times BC} = s v B$. Quod eſt theorema ſecundum:

Enuntia-




Enuntiatur quidem verbis primum theorema sic: Si duplicatum rectangulum sub lateribus datis ducatur in sinum versum anguli intercepti: & factus diuidatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum æqualis erit quadrato tertij lateris.

Secundum verò sic. Si differentia quadratorum lateris oppositi, & differentiæ laterum, ducatur in Radium; & factus diuidatur per duplicatum triangulum sub lateribus continentibus: Quotus æqualis erit sinui verso anguli quæsiti.

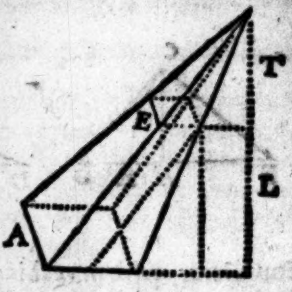
15 Datis frusti Pyramidis vtraque base Aq, Eq, & altitudine L: inuenire mensuram frusti.

Prænoscendum est ex 7 & 10 e 12, quod parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus; Et Cylindrus æquatur tribus conis, eiusdem basis & altitudinis.

Estque altitudo pyramidis abscissæ (T) primò quærenda, sic, A — E. E :: L. T. Quare $\frac{LE}{X} = T$. Et altitudo totius pyramidis est L + T. Item Pyramis tota tripla est AqL + AqT. Et Pyramis abscissa tripla est EqT. Ergo triplum frustum pyramidis est AqL + AqT — EqT.

Hoc

Hoc theorema ostendit vnum modum commensurandi frustum pyramidis: Enunciatur autem verbis sic.




Si solidum sub base maiore & tota altitudine multetur solido sub base minore & altitudine pyramidis abscissæ: reliqui triens æqualis erit frusto.

Rursus quia per 3 c 18. Aq−Eq = ZX: & T = $\frac{LE}{X}$. Erit AqL + (ZEL, hoc est per 3 c 19) AEL + EqL = AqL + AqT−EqT. Ergo triplex frustum pyramidis est etiam Aq + Eq + AE in L. Hoc theorema docet alterum modum commensurandi frusti, enuntiatur autem verbis sic.

*Si aggregatum vtriusque basis frusti pyramidis, & mediæ inter ipsas proportionalis, ducatur in altitudinem frusti: facti triens æqualis erit frusto.*

Item quia per 5 c 18, 2Aq + 2Eq = Zq + Xq: Erit ZqL + XqL + 2AEL æquale sex frustis. at per 5 cap: 18, Xq + 2 AE = Z. Ergo Zq + Z in L æquale est sex frustis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commensurandi frusti pyramidis. Enuntiatur autem verbis sic. Si ad aggregatum basium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriusque basis, & summa eorundem duca-

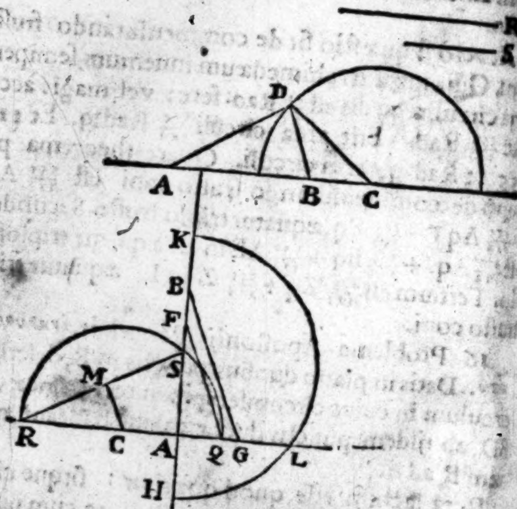
tur in altitudinem frusti: facti sextans æqualis erit frusto.

At verò si quæstio sit de commensurando frusto coni. Quia iuxta Archimedæum inuentum semiperiferia circuli æqualis est $\frac{22}{7}$ Rad: ferè: vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad. Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad:q. Et 113. 355 :: Rad:q. Area circuli. Quare theorema primum de commensurando frusto coni est $\frac{355}{113}$ AqL + $\frac{355}{113}$ AqT − $\frac{355}{113}$ Eq, æquatur triplo frusto. Secundum est $\frac{355}{113}$ Aq + $\frac{355}{113}$ Eq + $\frac{355}{113}$ AE in L, æquatur triplo frusto. Tertium est $\frac{355}{113}$ Zq + $\frac{355}{113}$ Z in L, æquatur triplo frusto coni.

16 Problema Apollonij Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A, B, describere circulum in cuius circumferentiam rectæ lineæ AD, BD, ab ijsdem punctis ductæ datam habeant rationem R ad S.

Puta factum esse quod quæritur: sitque circuli quæsiti centrum C in eadem recta linea cum punctis AB: & semidiameter CD. Triangula duo ACD, DCB, (vbicunque sumitur punctum D) sunt vt AC ad BC. Si igitur cogitentur esse similia; & esse AC. DC :: DC. BC: AD. BD :: R. S: Erit vbique circumferentiæ per 19 è 6. triang: ACD. DCB :: Rq. Sq. hoc est vt AC ad BC, per 10 def. e 5. His iam præmissis, pro segmento BC ponatur A. Erit Rq. Sq :: AB + A. A. quare $A = \frac{AB \times Sq}{Rq - Sq}$: Idcóque Rq − Sq. Sq :: AB. A. Denique $\sqrt{q}$: AC × BC = DCq.

Quæ




Quæ ſic enunciantur verbis. *Si punctorum interuallum ducatur in quadratum termini ſimilis minoris: & factus diuidatur per differentiam quadratorum a terminis ſimilibus: quotus æqualis erit diſtantiæ puncti citerioris a centro. Et latus quadratum rectanguli ſub vtraque diſtantia a centro, æquatur ſemidiametro.*

Geometricè ſic. Fiat AR = R, & AS = S: & iungantur ad angulos rectos. ducatur RS. & diuidatur bifariam in M: & in M puncto ſtatuatur perpendicularis MG, ſecans lineam RA in C. centro C, & ſemi-

ſemidiametro CR deſcribatur ſemicirculus R S Q. Erit Rq. Sq :: AR. AQ: Et Rq − Sq. Sq :: AR − AQ. AQ. Eſt autem CA = ½ AR − ½ AQ. Menſuretur AF = 2 CA: & AB = AB interuallo, ducatur FQ: eique parallela BG. Et erit AG = BC. Tum poſitis BK = AH = AG: inter AK & AH, hoc eſt AC & BC diſtantias a centro, inueniatur media proportionalis AL: quæ erit æqualis ſemidiametro CD.

17 Datis dolij, ſiue vaſis vinarij, longitudine interna 2 CL, & ſemidiametris tum medij CB, tum baſis LD: inuenire dolij ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſpheroideos, quæ fit reuolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſuerſam ſiue axim. Ad menſuram autem fruſti inueniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarum differentia eſt menſura fruſti.

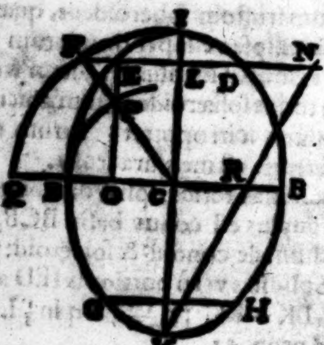
Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{11}{21}$ BCq in ⅔ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK: Archim: de conoid: & ſphæroid: prop. 29.

Soliditas verò portionis IED abſciſſæ habetur ſic: LK. LK + KC :: $\frac{11}{21}$ LDq in ⅓ LI. Soliditas quæſita. Ibid. prop. 31.

Deſideratur autem adhuc (qui huius negotij præcipuus eſt cardo) diameter tranſuerſa ſiue axis IK: quem ſic inuenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua, ſicut in ſchemate. Et fiat CK. CB :: CB. $\frac{CBq}{CK}$ = CR, quod eſt ſemilatus rectum per

13 l 1 conic: Apoll. Iterùm fiat CK. $\frac{CBq}{CK}$ :: C K + CL. $\frac{CBq \text{ in } CK + CL}{CKq} = LN.$ ducatur in IL, hoc est, CK—CL (quod idem est ac si ducatur CBq in CKq--CLq per 5 c 18) fietq; $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$ = LEq. per 13 l 1 conic:Apoll. Ergo $\sqrt{q}\frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$ = C K, semi-axi.




Quod theorema verbis enunciatur sic. *Si quadratum semidiametri medij dolij ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus diuidiatur per differentiam quadratorum a semidiametris medij & basis: quoti latus quadratum erit semi-axis sphæroideos.*

Geometricè sic. Ducatur EO parallela axi. Et semidiametro CP = CB fiat arcus secans ipsam EO in P. continuetur C P donec concurrat cum base LE producta in F. Erit CF æqualis semi-axi quæsito.

*Consectarium.* Atque hinc patet meridianos in Analem-

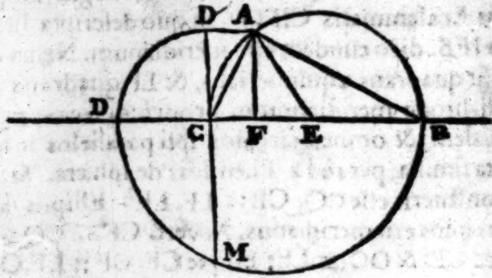
Analemmate esse veras Ellipses. v. g. cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ: in quo descripta sit Ellipsis IEB. dico eundem esse meridianum. Nam cùm CQ sit quadrans æquinoctialis, & LF quadrans paralleli; sitque meridianorum proprium secare æquinoctialem, & omnes circulos ipsi parallelos in segmenta similia, per 10 l 2 Theodos: de sphæra. Si igitur constiterit esse CQ. CB :: LF. LE: Ellipsis IEB secans ipsos erit meridianus. At verò CF $=$ CQ: & CP $=$ CB: & OC $=$ LE; Estque CF. CP :: LF. OC. Ergo.

18 Datis trianguli rectanguli hypotenusa BC, & CM media proportionali inter basem & Cathetum, inuenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam basis est BA, cathetus erit $\sqrt{q}$: BCq $-$ BAq: Et rectangulum sub ipsis $\sqrt{q}$, BCq $\times$ BAq $-$ BAqq: cuius latus quadratum, $\sqrt{qq}$: BCq $\times$ BAq $-$ BAqq: est media inter basem & cathetum proportionalis. Quare BCq $\times$ BAq $-$ BAqq $=$ CMqq. Atque hoc modo inuenietur BCq $\times$ CAq $-$ CAqq $=$ CMqq. Ergo per 5 c 19,

$$\tfrac{1}{2}BCq \pm \sqrt{q}:\tfrac{1}{4}BCqq - CMqq: = \begin{cases} BAq. \\ CAq. \end{cases}$$

Quod theorema enuntiatur verbis sic. Si dimidiato hypotenusæ quadrato, latus quadratum excessus quadrantis quadrato-quadrati hypotenusæ supra quadrato-quadratum mediæ proportionalis inter basem & cathetum, addatur; aggregatum erit basis quadratum: sin auferatur, reliquum erit quadratũ catheti.




Geometricè ſic. Statuantur BC & CM ad angulos rectos: & fiat CD tertia ad ipſas proportionalis, in linea MC producta. tum diametro BC deſcribatur ſemicirculus: in quo ponatur perpendicularis AF = CD. poſtremò ductis lineis BA, CA. compleatur triangulum.

Nam FEq = AEq − CDq. quare

$\frac{1}{2}BC \pm \sqrt{q}: \frac{1}{4}BCq - CDq: = \left\{ \begin{array}{l} BF. \\ CF. \end{array} \right.$ ducantur omnia in BC: fietque $\frac{1}{2}BCq \pm \sqrt{q}: \frac{1}{4}BCqq - (BCq * CDq,$ hoc eſt$) CMqq: = \left\{ \begin{array}{l} BC * BF = BAq \\ BC * CF = CAq \end{array} \right\}$ Ergo.

19 Datis trianguli rectanguli baſe BA, & AM media proportionali inter hypotenuſam & cathetum: inuenire triangulum.

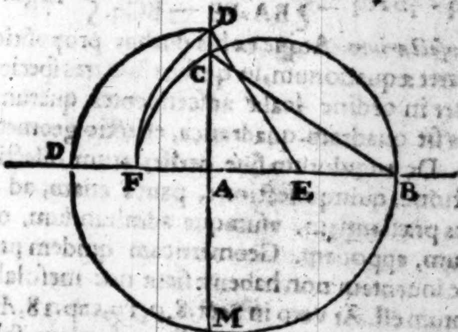
Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam cathetus eſt CA, hypotenuſa erit $\sqrt{q}$: BAq + CAq: & media inter ipſas proportionalis $\sqrt{qq}$: CAqq + BAq * CAq.

Item

Item quoniam hypotenusa est BC, cathetus erit $\sqrt{q}:BCq - BAq:$ & media inter ipsas proportionalis $\sqrt{qq}:BCqq - BAq \times BCq.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Quare } CAqq + BAq \times CAq = AMqq \\ \& \ BCqq - BAq \times BCq = AMqq \end{array}\right\} \text{Ergo per 6 c 19}$$

$$\sqrt{q}:\tfrac{1}{4}BAqq + AMqq: \mp \tfrac{1}{2}BAq = \left\{\begin{array}{l} CAq. \\ BCq. \end{array}\right.$$




Quod theorema enuntiatur verbis sic. Si lateri quadrato summæ, ex quadrante quadrato-quadrati basis, & quadrato-quadrato mediæ proportionalis inter hypotenusam & cathetum, dimidiata basis, auferatur; reliquum erit catheti quadratum: sin addatur; aggregatum erit quadratum hypotenusæ.

Geometricè sic. Statuantur BA & AM ad angulos rectos: Et fiat AD tertia ad ipsas proportionalis, per 11 e 6, in linea MA producta. Tum posito vno pede circini in E medio puncto lineæ BA, & altero pede in D, fiat EF = ED: Et diametro BF describatur semi-

 circulus,

circulus, ſecans perpendicularem AD in C, poſtremò ducta recta BC, compleatur triangulum.

Nam $FEq = \frac{1}{4} BAq + ADq$. quare

$\sqrt{q}: \frac{1}{4} BAq + ADq: \mp \frac{1}{2} BA = \left\{ \begin{matrix} FA, \\ FB. \end{matrix} \right.$ Ducantur omnia in BA: fietque $\sqrt{q}: \frac{1}{4} BAqq + (BAq \times ADq$, hoc eſt$)$

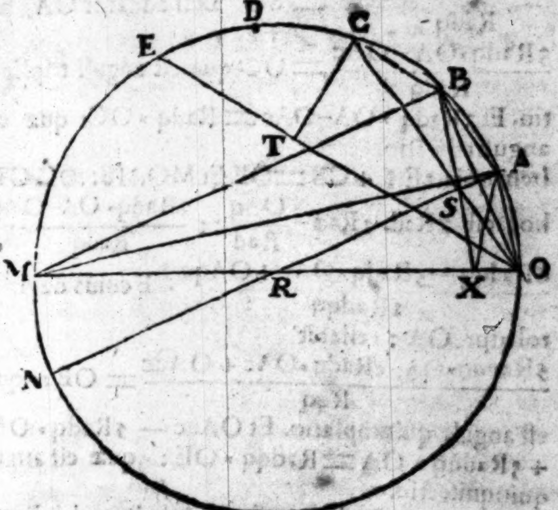
$AMqq: \mp \frac{1}{2} BAq = \left\{ \begin{matrix} BA \times FA = CAq. \\ BA \times FB = BCq. \end{matrix} \right\}$ Ergo.

*Conſectarium.* Atque ex his duabus propoſitionibus patet æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ adſcendentes, quarum ſuprema ſit quadrato-quadratica, effectio geometrica.

20 De angulorum ſiue periferiarum biſectione, triſectione, quinquiſſectione, pauca etiam, ad Analytices præſtantiam, vſumque admirandum, oſtendendum, apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inuentam non habent: ſicut nec meſolabium inuentum eſt. At vero in Sect. 8, 9, 10, cap. 18, Æquationes quaſdam cubicas tradidi, quâ etiam ſolertiâ alias innumeras Analytices ſtudioſus poterit comminiſci: quarum fortaſſe ope meſolabium, hactenùs tenebris obuolutum, in lucem tandem proferatur.

Diſtinguantur in periferia quinq; æqualis partes ab O fine diametri literis A B C D E, ducantur ſubtenſæ ſicut fit in ſchemate. ſumatur $MX = MB$, ducantur etiam AX & XB, & diameter NRA, & ad OE perpendicularis CT. Quoniam per 4 e 1, $AB = AX$: erunt triangula BMX, ORA, OAX, ſimilia, ideóque $\frac{OAq}{Rad.} = OX$. ſunt etiam triang: OAB, ARM ſimilia. Et per 47 e 1 $MA = \sqrt{q}: 4\,Radq - OAq$.

His




His sic præmissis, erit RA, MA, hoc est, Rad. $\sqrt{q}$: 4Radq — OAq :: OA. OB. Ergo $\frac{4Radq \cdot OAq - OAqq}{Radq}$ = OBq: quæ est anguli duplicatio.

Et 4Radq $\cdot$ OAq - OAqq = Radq $\cdot$ OBq: quæ est anguli bisectio.

Deinde quia OS = OA. & SA = OX. & NS = MX = MB. Erit per 15 c 19 $\frac{NS \cdot SA}{OS}$ = SC: hoc est 2Rad — $\frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, diuisa per OA, vel

2Radq

$\frac{2Radq \times OA - OAc}{Radq} = SC$. Et si addatur OA, fit

$\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ est anguli triplicatio. Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ est anguli trisectio.

Item quia $2ET + CB = OE$. Et MO.MB::OC.CT; hoc est $2Rad.\ 2Rad - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq}$.

$\frac{6Radqq - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Radqq}$: E cuius duplo si tollatur OA; restabit

$\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ est anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc + 5Radqq \times OA = Radqq \times OE$: quæ est anguli quinquisectio.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in multiplicatione, & diuisione, nihil mutat: idcirco in sex hisce æquationibus, Radius cum omnibus suis potestatibus omitti poterit.

Sed quo artificio istiusmodi operosæ æquationes (in quibus non sunt tantùm tres species æqualiter distantes) soluantur, non est huius instituti docere. Posthac fortassis quid in hoc negotio ante multos annos commentus sum, si nobilissimo adolescentati (cui, illustrissimæq; *Howardorum* familiæ debetur, quicquid ex his vtilitatis adiumentiq; quispiam percipiet) voluptati erit pulcherrimis his, vereq; principe dignis, studijs animũ intendere, in lucẽ proferre non tædebit.

*Soli Deo gloria.*

FINIS.